

SÉRIE E

N° D'ORDRE : 32

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

DANIEL PONASSE

1^{re} THÈSE. — PROBLÈMES D'UNIVERSALITÉ S'INTRODUISANT DANS L'ALGÈBRISATION
DE LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 Juin 1961 devant la Commission d'examen

MM. BLANC,
DE POSSEL,
SAMUEL,
KRASNER.

Président.

Examineurs.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546617_0018

Série E
N° d'ordre : 32

THESES

Présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE CLERMONT-FERRAND

Pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par

Daniel PONASSE

1^{re} THESE. - PROBLÈMES D'UNIVERSALITÉ S'INTRODUISANT DANS
L'ALGÈBRISATION DE LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE.

2^e THESE. - PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTE.

Soutenues le 7 juin 1961 devant la Commission d'examen.

MM. BLANC,	Président.
de POSSEL,	} Examineurs.
SAMUEL,	
KRASNER.	

FACULTE DES SCIENCES
de
L'UNIVERSITE DE CLERMONT.

DOYEN

M. REMY Paul

DOYENS HONORAIRES

M. DUBOIS Emmanuel
M. HOVASSE Raymond
M. DELANGE Hubert

ASSESSEUR

M. DUBOIS Emmanuel

PROFESSEURS

M. DUBOIS Emmanuel	T	Physique
M. HOVASSE Raymond	T	Zoologie Générale et Appliquée
M. CHAZE Jean	T	Botanique Pure et Appliquée
M. RAMBAUD René	T	Chimie
M. REMY Paul	T	Chimie Industrielle
M. BLANC Eugène	T	Mécanique Rationnelle
M. ROQUES Maurice	T	Géologie, Minéralogie
M. LAPADU-HARGUES Pierre	T TP	Minéralogie
M. TRUFFAULT Robert	T TP	Chimie
M. LUTZ Hubert	T TP	Zoologie
M. RAOULT Gaston	T	Physique
M. SAMUEL Pierre	T	Calcul Différentiel et Intégral
M. CHAMPAGNAT Paul	T	Physiologie Végétale
M. DUPLESSIS-KERGOMARD Alain	T TP	Chimie P.C.B.
M. KRASNER Marc	T	Algèbre Supérieure
M. AVAN Louis	T	Physique Expérimentale
M. PARIAUD Jean-Charles	T	Chimie Physique

MAITRES DE CONFERENCES

Mme. HENNEQUIN Françoise, Professeur sans chaire	Mathématiques
M. de PUYTORAC Pierre, Professeur sans chaire	Biologie
Mle. BERTHET Ginette, Professeur sans chaire	Physique
Mme. AVAN Madeleine, Professeur sans chaire	Physique
M. COMBE René	Physique
M. LOISEAU Jean	Botanique
M. DELOST Paul	Physiologie Animale
M. PETERLONGO Jean-Marc	Géologie
Mle. DONDON Marie-Louise	Chimie Physique
M. SAUREL Jean	Physique
M. VESSIERE Roger	Chimie
M. LAFON Jean-Pierre	Mathématiques

SECRETAIRE PRINCIPAL

M. BRETAGNE Gaëtan



A MA FEMME

A MES ENFANTS

PROBLEMES D'UNIVERSALITE S'INTRODUISANT DANS
L'ALGEBRISATION DE LA LOGIQUE MATHEMATIQUE.

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est essentiellement la recherche et l'étude de structures algébriques permettant de traduire le Calcul propositionnel et le Calcul des prédicats restreint du premier ordre. Nous avons guidé et limité cette recherche en imposant aux ensembles algébriques introduits de satisfaire simultanément aux trois conditions :

- donner une représentation du Calcul Logique sous sa forme la plus classique, c'est à dire avant l'obtention d'un anneau booléen par passage au quotient. Ce sera le rôle des structures "prébooléennes".
- posséder un ensemble d'opérations traduisant un procédé de décision tel que celui des tableaux sémantiques, qui correspondent ici aux "tableaux de réduction".
- avoir un caractère universel dans leur construction à partir des atomes.

Le chapitre I est consacré à la construction et à l'étude d'un anneau booléen universel. Nous définissons d'abord la structure prébooléenne plus générale que celle d'anneau booléen et qui précède nécessairement cette dernière. Partant d'un ensemble E quelconque, nous construisons un ensemble prébooléen $\tilde{E}$ dont les éléments se présentent sous forme de tableaux; par passage au quotient, $\tilde{E}$ engendre un anneau booléen $\langle E \rangle$ universel vis-à-vis de E . Ce chapitre se termine par l'étude de certaines propriétés topologiques de $\langle E \rangle$, d'une part sa densité dans l'espace produit $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, et d'autre part l'homéomorphisme entre l'espace de ses ultrafiltres et l'espace produit $\mathcal{P}(E)$.

Le chapitre II concerne l'interprétation des résultats précédents pour l'ensemble $\mathcal{F}$ des propositions : cet ensemble est prébooléen et engendre ainsi l'anneau booléen classique $\mathcal{F}/R$. Cet anneau $\mathcal{F}/R$ est universel vis-à-vis de l'ensemble $\mathcal{A}$ des atomes, il en résulte l'isomorphie entre $\mathcal{F}/R$ et $\langle \mathcal{A} \rangle$. Nous disposons alors d'une bijection

associant à toute formule P , ou plutôt à la classe d'équivalence qu'elle représente, son "tableau de réduction achevé" $r(P)$, dont la seule lecture permet immédiatement de faire l'analyse de P suivant les atomes qui la composent. Au paragraphe 3, nous introduisons un autre anneau universel $\{\mathcal{B}\}$ isomorphe aux deux précédents, et à l'intérieur duquel nous disposons d'un procédé absolument automatique pour la construction des tableaux de réduction achevés, ce sont les opérations de réduction qui sont exactement l'équivalent algébrique des règles de constitution des tableaux sémantiques (méthode de M. E.W.BETH). Il nous a paru intéressant au paragraphe 4 de donner une application de cette méthode : la recherche des formes normales, nous remarquons notamment qu'il n'y a pratiquement aucune différence entre l'écriture d'un tableau de réduction achevé et celle d'une forme normale conjonctive correspondante. Le dernier paragraphe concerne le calcul des conséquences, nous montrons essentiellement que le calcul des conséquences finies se confond avec celui des propositions dans l'anneau $\{\mathcal{B}\}$ et par suite dans $\langle \mathcal{A} \rangle$, et par ailleurs l'étude des conséquences infinies résulte immédiatement des propriétés topologiques de cet anneau $\langle \mathcal{A} \rangle$.

En résumé, dans cette première partie, nous pensons avoir mis en évidence les liens qui existent entre les deux formes principales du Calcul des propositions : la forme "déductive" (à partir des axiomes-schémas et de la règle de modus ponens), et la forme "calcul des conséquences" (méthodes de GENTZEN et de BETH); ce rapprochement étant dû essentiellement au caractère universel du Calcul propositionnel.

Au chapitre III nous introduisons tous les êtres algébriques qui nous seront nécessaires pour l'étude du Calcul des prédicats. A cet égard, nous utilisons ou nous retrouvons beaucoup de résultats de M. P.R.HALMOS (anneaux monadiques ou polyadiques), toutefois avec une méthode et une direction de recherche qui nous semblent assez différentes, puisque c'est aux individus et aux substitutions d'individus que nous accordons une place prépondérante, les quantificateurs ne viennent qu'ensuite et sont alors imposés par le choix des substitutions; en outre, au lieu d'associer un quantificateur à chaque partie J de l'ensemble I des individus, il nous a paru plus simple et suffisant pour le Calcul des prédicats restreint du premier ordre, de ne considérer que des quantificateurs individuels. Nous définissons donc d'abord la structure d'ensemble individualisé (paragraphe 1), c'est à dire un ensemble sur lequel on peut effectuer des substitutions d'individus; quatre axiomes très simples suffisent pour caractériser de tels ensembles. A ce sujet signalons qu'un cinquième axiome d'individualisation serait nécessaire pour l'introduction ultérieure d'une "égalité" (au sens Logique), et nous espérons pouvoir publier prochainement les résultats d'une algébrisation analogue du Calcul des prédicats avec égalité. Au paragraphe 2, nous démontrons des propriétés intéressantes des substitutions lorsque ce sont des homomorphismes ou des préhomomorphismes; nous constatons également que les anneaux du type $\langle \mathcal{A} \rangle$ restent universels pour la structure d'anneau booléen individualisé. Aux paragraphes 3 et 4, les quantificateurs s'introduisent de façon très naturelle dans les anneaux booléens ou les ensembles prébooléens

individualisés. Le paragraphe 5 concerne l'étude de la seule quantification possible sur les anneaux $\langle A \rangle$, avec la mise en évidence du phénomène suivant : le caractère universel jusqu'ici conservé disparaît totalement après quantification; or, ainsi qu'on le voit par la suite, le Calcul des prédicats est universel pour les structures quantifiées; ceci met en lumière l'impossibilité de construire des tableaux de réduction achevés (ou des tableaux sémantiques finis) pour les prédicats.

Le chapitre IV est l'analogue, dans la mesure du possible, du chapitre II. Nous montrons l'universalité du Calcul des prédicats vis-à-vis de l'ensemble A de ses atomes, pour les structures précédemment introduites. L'étape $\langle A \rangle$ disparaît, mais nous retrouvons l'isomorphie entre E/R et $\{E\}$, qui nous permet là encore de donner l'équivalent algébrique de toutes les règles de constitution des tableaux sémantiques.

En ce qui concerne la disposition pratique de ce travail, nous avons adopté les modalités suivantes : la numérotation des paragraphes est discontinue, elle va de 1 à n à l'intérieur de chaque chapitre, de même pour les théorèmes, propositions et lemmes, ils sont numérotés de 1 à n à l'intérieur de chaque paragraphe. Les définitions et axiomes introduits étant dans l'ensemble relativement nombreux, on trouvera à la fin un index les résumant. Nous n'avons mis aucune référence à l'intérieur du texte, par contre la bibliographie qui suit immédiatement cette introduction a été classée par matières, ce qui permet de retrouver aisément, suivant la nature de tel ou tel résultat que nous avons utilisé sans démonstration, l'ouvrage dont il a été tiré.

Ce travail est placé sous le double signe de l'Algèbre et de la Logique. Je suis profondément reconnaissant envers M. P.SAMUEL qui a dirigé ma thèse, c'est à lui que je dois toutes mes connaissances d'Algèbre, ses encouragements et ses conseils m'ont été extrêmement précieux, et son enseignement restera toujours pour moi un modèle de clarté et de simplicité. En ce qui concerne la Logique, je dois beaucoup à M. M.GUILLAUME qui, au cours de deux années de Séminaire, m'a appris les bases de la Logique classique et m'a fait connaître la très belle théorie des tableaux sémantiques de M. E.W.BETH. C'est également dans les exposés de ces séminaires que l'on peut trouver le point de départ de l'algébrisation telle qu'elle est conçue dans ce mémoire.

J'ai également de très vifs remerciements à adresser à M. E.BLANC, sous la direction duquel j'effectue avec beaucoup de plaisir mon travail d'enseignant depuis déjà quelques années, et je suis persuadé que le climat de compréhension et d'amitié qu'il a su créer dans nos rapports a largement contribué à aplanir les difficultés qui surgissent inévitablement lorsqu'on doit mêler la recherche à l'enseignement. Enfin, en me donnant le sujet de ma seconde thèse, il m'a permis d'approfondir l'admirable théorie de R.NEVANLINNA, mais cela c'est une autre histoire...

Je prie M. R. de POSSEL et M. M.KRASNER, qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à ce travail et de faire partie du jury,

de vouloir bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Enfin, je ne saurais oublier ce que je dois à ma femme pour l'aide matérielle considérable qu'elle m'a apportée dans la dactylographie de ce mémoire.

BIBLIOGRAPHIE

Applications et ensembles universels

N.BOURBAKI : Algèbre, chap.III, appendice III. Act. Sci. et Ind.
(1948), n° 1044, Hermann, Paris.

Anneaux booléiens

M.H.STONE : "The theory of representations for boolean algebras".
Trans. Amer. Math. Soc. (1936), n° 40, pp 37 à 111.

Topologie

- Pour les produits d'espaces topologiques :

N.BOURBAKI : Topologie Générale, chap.I, parag.8. Act. Sci. et Ind.
(1951), n° 858-1142, Hermann, Paris.

- Pour les espaces booléiens :

R.F.ARENS - I.KAPLANSKY : "Topological representations of algebras".
Trans. Amer. Math. Soc. (1948), n° 63
pp 457 à 481.

M.H.STONE : "Applications of the theory of boolean rings to general
topology". Trans. Amer. Math. Soc. (1937), n°41, pp 321
à 364.

Logique

E.W.BETH : "Les fondements logiques des mathématiques".(1955) }
"L'existence en Mathématique".(1956) }
"La crise de la raison et la Logique".(1957) }
Gauthier-Villars, Paris.
"The foundations of Mathematics". North-Holland (1959).

SEMINAIRE DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT.(*)

-exposés 1957/58 : Calcul Propositionnel (par M. GUILLAUME, P.SAMUEL,
D.PONASSE).

-exposés 1958/59 : Calcul des prédicats restreint du premier ordre
(par M.GUILLAUME).

(*) Un tirage très limité fait que seule la Bibliothèque de l'Institut
de Mathématiques de Clermont possède un exemplaire de ces comptes-
rendus.

- Pour l'analyse des valeurs de vérité :

W.V.O. QUINE : "Methods of Logic", part I, parag. 5. H.Holt, New-York, (1953).

- Pour le calcul des conséquences :

G.GENTZEN : "Recherches sur la déduction logique". Traduction de R.Feys et J.Ladrière. Presses Universitaires de France, (1955).

Logique algébrique

P.R.HALMOS : "Monadic boolean algebras". Comp. Math. 12 (1955), pp 217 à 249.
 "Polyadic boolean algebras". Fund. Math. 43 (1956), pp 255 à 325.

D.PONASSE : "Structure prébooléenne. Ensemble prébooléen universel associé à un ensemble quelconque". C.R. Acad. Sci. 248, (1959), pp 899 à 902.
 "Anneau booléen universel associé à un ensemble quelconque. Applications au Calcul propositionnel". C.R. Acad. Sci. 248, (1959), pp 1093 à 1096.

TABLE DES MATIERES

page

1	<u>Préliminaires sur les applications universelles</u>
4	<u>CHAPITRE I</u> : Construction d'un anneau booléen universel
4	1- Définition d'un ensemble prébooléen
9	2- Ensemble prébooléen $\bar{E}$
15	3- Anneau booléen universel $\langle E \rangle$
18	4- Propriétés topologiques de l'anneau $\langle E \rangle$
23	<u>CHAPITRE II</u> : Tableaux de réduction pour le Calcul Propositionnel
23	1- Préliminaires
27	2- Tableaux de réduction achevés
29	3- Opérations de réduction
34	4- Application : calcul des formes normales
38	5- Application : calcul des conséquences
42	<u>CHAPITRE III</u> : Substitutions et quantificateurs
42	1- Ensemble individualisé
48	2- Anneaux booléens et ensembles prébooléens individualisés
53	3- Anneau booléen quantifié
59	4- Ensemble prébooléen quantifié
62	5- Application aux anneaux $\langle A \rangle$
70	<u>CHAPITRE IV</u> : Applications au Calcul des Prédicats
70	1- Anneau booléen quantifié validé E/R
73	2- Universalité de E/R
78	3- Tableaux de réduction inachevés
VIII	<u>INDEX</u> : Définitions - Axiomes

PRELIMINAIRES SUR LES APPLICATIONS UNIVERSELLES

La recherche d'ensembles et d'applications universels intervenant fréquemment dans la suite, il est sans doute préférable de rappeler et de préciser ces notions.

Considérons d'une part tous les ensembles, notés E_S , munis d'une certaine structure S , d'autre part tous les ensembles, notés E_T , munis d'une structure T . Les structures S et T peuvent être identiques, il se peut également que l'une ou l'autre de ces structures soit la structure vide, auquel cas les ensembles correspondant sont les ensembles sans structure.

On se donne également pour tout couple (E_S, E_T) une famille d'applications de E_S dans E_T , dites (S, T) -applications.

On se donne enfin, pour tout couple (E_T, E'_T) une famille d'applications de E_T dans E'_T , dites T -applications.

On suppose que ces structures et applications vérifient les conditions suivantes :

- U1/ Tout isomorphisme entre un ensemble E_T et un ensemble E'_T est une T -application.
- U2/ Si g est une T -application d'un ensemble E_T dans un ensemble E'_T et g' une T -application de E'_T dans un ensemble E''_T , alors $g' \circ g$ est une T -application de E_T dans E''_T .
- U3/ Si f est une (S, T) -application d'un ensemble E_S dans un ensemble E_T et g une T -application de E_T dans un ensemble E'_T , alors $g \circ f$ est une (S, T) -application de E_S dans E'_T .

Le "problème universel", pour les types de structures et d'applications en question, est alors le suivant :

A tout ensemble E_S faire correspondre un ensemble U_T et une (S, T) -application u de E_S dans U_T , tels que toute (S, T) -application f de E_S dans un ensemble E_T puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme $f = g \circ u$ où g est une T -application de U_T dans E_T .

Lorsque ceci est possible on dit que U_T et u sont, respectivement, un ensemble et une application universels associés à E_S .

Supposons avoir une autre solution associée au même ensemble E_S , pour le même problème universel : (U'_T, u') .

- U_T et u étant universels : il existe une T -application g de U_T dans U_T' et une seule, telle que $u' = g_0 u$.
- U_T' et u' étant universels : il existe une T -application g' de U_T' dans U_T et une seule, telle que $u = g'_0 u'$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } u &= g'_0 u' = g'_0 (g_0 u) = (g'_0 g)_0 u \\ u' &= g_0 u = g_0 (g'_0 u') = (g_0 g')_0 u' \end{aligned}$$

et $g'_0 g$ et $g_0 g'$ sont des T -applications (condition U2) de U_T dans U_T et de U_T' dans U_T' respectivement.

Or, u étant une (S, T) -application de E_S dans U_T , il existe une T -application et une seule de U_T dans U_T , en l'occurrence l'application identique i , telle que : $u = i_0 u$.

Donc :

$g'_0 g = i$: application identique de U_T
 $g_0 g' = j$: application identique de U_T'

Il en résulte que g et g' sont des bijections réciproques l'une de l'autre, en effet :

- supposons $g(x) = g(y)$, alors $g'(g(x)) = g'(g(y))$, soit $x = y$; g est donc biunivoque, et de même g' .
- soit $x' \in U_T'$: $g(g'(x')) = x'$, donc g est surjective, et de même g' .

Ainsi :

Si (U_T, u) et (U_T', u') sont deux solutions du même problème universel, associées à un même ensemble E_S , alors il existe une bijection g , qui est une T -application de U_T sur U_T' , telle que : $u' = g_0 u$ et $u = g^{-1}_0 u'$ (g^{-1} étant également une T -application).

Cas particulier

Très souvent les éléments donnés du problème universel satisfont à la condition suivante (plus forte que la condition U1) :

U4/ Pour qu'une bijection g d'un ensemble E_T sur un ensemble E_T' soit un isomorphisme, il faut et il suffit que g et g^{-1} soient des T -applications.

Si cette condition est vérifiée on a alors le résultat suivant :

Si (U_T, u) et (U_T', u') sont deux solutions du même problème universel, associées à un même ensemble E_S , alors U_T et U_T' sont isomorphes.

Exemple

E_S : les anneaux intègres.

E_T : les corps.

(S, T) -applications : les homomorphismes biunivoques d'un anneau intègre dans un corps.

T-applications : les homomorphismes biunivoques d'un corps dans un corps.

Les conditions U1, U2, U3 sont bien remplies. Ce problème universel est résolu de la façon suivante :

A tout anneau intègre E_S on fait correspondre son corps des fractions U_T et l'application u :

$$x \in E_S \longrightarrow x/1 \in U_T$$

En effet, étant donnés un corps E_T et un homomorphisme biunivoque f de E_S dans E_T , il suffit de définir l'application g de U_T dans E_T par :

$$g(x/y) = f(x).(f(y))^{-1}$$

Nous remarquons qu'ici la condition U4 est également vérifiée, par suite tout autre corps universel pour ce problème sera isomorphe au corps des fractions.

CHAPITRE I : CONSTRUCTION D'UN ANNEAU BOOLEIEN UNIVERSEL

-1- Définition d'un ensemble prébooléen

Nous définirons la structure d'ensemble prébooléen au moyen des données suivantes :

- un ensemble non vide F , éléments notés $x, y, z, \dots$
- une loi de composition interne partout définie sur F , notée $x.y$, et pouvant être appelée "multiplication".
- une application de F dans F : $x \longrightarrow -x$ ("négation")
- une famille non vide $(C_k)_{k \in K}$ de parties de F .

Ces données devant vérifier les deux axiomes suivants :

$$P1/ (x \in C_k) \iff (-x \notin C_k) \quad \text{pour tout } x \text{ et tout } k$$

$$P2/ (x.y \in C_k) \iff (x \in C_k \text{ et } y \in C_k) \quad \text{pour tout } x, \text{ tout } y \text{ et tout } k.$$

Notons que les opérations de multiplication et de négation ne sont soumises à aucune condition (telle que associativité, etc...).

$(C_k)_K$ sera dite la famille déductive de F , chaque C_k étant un ensemble déductif.

L'ensemble $T = \bigcap_K C_k$ n'est jamais vide, car pour tout x on a : $-(x.-x) \in T$.

Cet ensemble $T = \bigcap_K C_k$ sera dit le puits de F .

Proposition 1 : T et chaque C_k sont stables pour la multiplication.

Pour C_k c'est évident. Pour T : si x et y appartiennent à T , ils appartiennent à chaque C_k , donc aussi $x.y$, par suite $x.y \in T$.

Introduisons dans F la relation binaire $x \prec y$ exprimée par :

$-(x.-y) \in T$; c'est une relation de préordre, en effet :

$x \prec y$ peut s'exprimer par : pour tout k : $-(x.-y) \in C_k$

soit :	"	:	$x.-y \notin C_k$
" :	"	:	$x \notin C_k$ ou $y \in C_k$
" :	"	:	si $x \in C_k$ alors $y \in C_k$

$x \prec x$ est alors évident.

Proposition 4 : Chaque $\varphi(C_k)$ est un ultrafiltre de F/R .

Démonstration : remarquons d'abord que si $\varphi(x) \in \varphi(C_k)$, il existe $x' \in C_k$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x')$, x et x' sont donc analogues et par suite : $x \in C_k$.

- a) si $\varphi(x) \in \varphi(C_k)$ et si $\varphi(y) \geq \varphi(x)$: $\varphi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$, donc $x \cdot y$ est analogue à x , or $x \in C_k$, donc $x \cdot y \in C_k$, ce qui implique $y \in C_k$ et par suite $\varphi(y) \in \varphi(C_k)$.
- b) si $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ appartiennent à $\varphi(C_k)$: x et y appartiennent à C_k , donc aussi $x \cdot y$, donc $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y) \in \varphi(C_k)$.
- c) $0 \notin \varphi(C_k)$, car $0 = \varphi(x)$ où $-x \in T$, donc $-x \in C_k$ et $x \notin C_k$.
- d) si $\varphi(x) \notin \varphi(C_k)$, alors $x \notin C_k$ donc $-x \in C_k$ et $-\varphi(x) = \varphi(-x) \in \varphi(C_k)$.

Etant donnés deux ensembles prébooléens $F(T, R)$ et $F'(T', R')$, nous appellerons préhomomorphisme de F dans F' toute application f vérifiant les deux axiomes :

- PH1/ f conserve la multiplication et la négation modulo R' dans F'
- PH2/ $f(T) \subset T'$

Remarques

Ces deux axiomes sont indépendants, considérons en effet un anneau booléen B ayant au moins 4 éléments (donc au moins 2 ultrafiltres différents); désignons par $F'(T', R')$ cet anneau B muni de la structure prébooléenne normale (on a donc $T' = \{1\}$), et par $F(T, R)$ l'ensemble B muni de la structure prébooléenne suivante :

- la multiplication et la négation sont celles de l'anneau booléen B
- il y a un seul ensemble déductif $\mathcal{U}$ qui est un ultrafiltre choisi de l'anneau booléen B .

On a donc $T = \mathcal{U}$

Pre-nons pour f l'application identique de B dans B ; elle conserve (exactement) la multiplication et la négation, donc satisfait à PH1; par contre PH2 n'est pas vérifié, car :

$$f(T) = f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \not\subset T' = \{1\}$$

Il est également facile de voir que PH1 n'est pas une conséquence de PH2 : il suffit de prendre pour f l'application d'un anneau booléen B , muni de la structure prébooléenne normale, dans lui-même, définie par :

$f(x) = 1$ pour tout x ; on a bien $f(T) = \{1\} \subset T = \{1\}$; mais par contre : $f(-1) = f(0) = 1$, alors que $-f(1) = -1 = 0$.

Nous remarquons également que si ces deux axiomes sont vérifiés, l'inclusion imposée par PH2 peut fort bien être stricte, ce sera le cas, par exemple, lorsque f est l'application identique de $F'(T', R')$ dans $F(T, R)$, avec les notations du premier exemple de ces remarques, en effet :

$$f(T') = f(\{1\}) = \{1\} \subsetneq T = \mathcal{U}$$

Un préhomomorphisme sera dit strict (*), s'il conserve exactement la multiplication et la négation; ce sera le cas, en particulier, chaque fois que F' sera un anneau booléen muni de la structure prébooléenne normale. L'application canonique φ de F dans F/R est donc toujours un préhomomorphisme strict.

Proposition 5 : La relation de préordre, et par suite celle d'analogie, sont conservées par tout préhomomorphisme.

En effet, supposons $x < y$ dans F , et soit f un préhomomorphisme de F dans F' , on a : $-(x.-y) \in T$, donc d'après PH2, $f(-(x.-y)) \in T'$, mais d'après PH1, $f(-(x.-y))$ est analogue à $-(f(x).-f(y))$, donc ce dernier élément appartient à T' , donc $f(x) < f(y)$ dans F' .

THEOREME 2 : Soient $F(T,R)$ et $F'(T',R')$ deux ensembles prébooléens, φ et φ' leurs applications canoniques dans F/R et F'/R' , $\underline{f}$ un préhomomorphisme de F dans F' , alors l'application $\bar{f}$ définie par : $\bar{f}(\varphi(x)) = \varphi'(f(x))$ est un homomorphisme d'anneaux de F/R dans F'/R' .

En effet : d'après la proposition 5, $\bar{f}(\varphi(x))$ a une définition qui est bien indépendante du représentant choisi dans $\varphi(x)$.

- a) $\bar{f}(-\varphi(x)) = \bar{f}(\varphi(-x)) = \varphi'(f(-x)) = \varphi'(-f(x))$ car $f(-x)$ et $-f(x)$ sont analogues; et $\varphi'(-f(x)) = -\varphi'(f(x)) = -\bar{f}(\varphi(x))$.
 b) $\bar{f}(\varphi(x).\varphi(y)) = \bar{f}(\varphi(x.y)) = \varphi'(f(x.y)) = \varphi'(f(x).f(y))$
 $= \varphi'(f(x)).\varphi'(f(y)) = \bar{f}(\varphi(x)).\bar{f}(\varphi(y))$

THEOREME 3 : Si $\bar{f}$ est un homomorphisme d'anneaux de F/R dans un anneau booléen B quelconque, alors $f = \bar{f}_0 \varphi$ est un préhomomorphisme (strict) de F dans B muni de la structure prébooléenne normale.

Démonstration :

- a) $f(-x) = \bar{f}(\varphi(-x)) = \bar{f}(-\varphi(x)) = -\bar{f}(\varphi(x)) = -f(x)$
 b) $f(x.y) = \bar{f}(\varphi(x.y)) = \bar{f}(\varphi(x).\varphi(y)) = \bar{f}(\varphi(x)).\bar{f}(\varphi(y)) = f(x).f(y)$

THEOREME 4 : Soit F un ensemble prébooléen et B un anneau booléen fixé $\neq (0)$; pour que $x \in T$ il faut et il suffit que $f(x) = 1$ pour tout préhomomorphisme f de F dans B muni de la structure prébooléenne normale.

Démonstration :

- a) si $x \in T$: $f(x) \in f(T) \subset \{1\}$, donc $f(x) = 1$

(*) La terminologie utilisée ici est différente de celle que l'on trouve dans "PONASSE, Comptes Rendus A.S." (qui est préhomomorphisme "égalitaire"), car il est préférable (ainsi que l'a d'ailleurs fait remarquer M.GUILLAUME, dans sa thèse) de n'utiliser le mot "égalitaire" que lorsqu'il s'agira de structure algébrisant le Calcul des Prédicats avec égalité.

b) si $f(x) = 1$ pour tout f : soit $\bar{f}$ un homomorphisme quelconque de F/R dans B , $f = \bar{f} \circ \varphi$ est un préhomomorphisme, donc $\bar{f}(\varphi(x)) = 1$; ceci étant vrai de tout homomorphisme $\bar{f}$, il en résulte (conséquence du théorème de représentation de Stone) que $\varphi(x) = 1$, et par suite $x \in T$.

Remarque : ce théorème peut s'utiliser en prenant pour B un anneau booléen particulièrement simple, tel que $Z/(2)$.

-2- Ensemble prébooléen $\ddot{E}$

Soit E un ensemble absolument quelconque, nous désignerons par $(E, O, 1)$ l'ensemble E complété par deux éléments supplémentaires notés O et 1 (ces deux éléments joueront essentiellement un rôle de position et n'ont aucun caractère d'éléments neutres). Nous appellerons bloc toute suite finie non vide d'éléments de $(E, O, 1)$ écrits horizontalement par juxtaposition :

$$x_1 x_2 \dots x_n$$

On désignera par $\ddot{E}$ l'ensemble des tableaux de la forme :

$$\left\langle \begin{array}{ccc} x_1 \dots x_n & & z_1 \dots z_p \\ x'_1 \dots x'_n, & \dots & z'_1 \dots z'_p, \end{array} \right\rangle$$

formés de deux lignes et d'un nombre fini de colonnes (au moins une), chaque colonne étant constituée de deux blocs superposés, chaque bloc supérieur devant comporter au moins un 1 et chaque bloc inférieur au moins un O . Les éléments génériques de $\ddot{E}$ seront désignés par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Une colonne d'un tableau α sera dite close si un élément au moins de son bloc supérieur figure également dans son bloc inférieur (indépendamment de sa position dans chacun de ces blocs). Une colonne non close sera dite ouverte. Un tableau α sera dit clos (resp. ouvert) si toutes ses colonnes sont closes (resp. si au moins une de ses colonnes est ouverte).

→ On désignera par U le sous-ensemble $\{O, 1\}$ de $(E, O, 1)$, et par $\vec{E}$ l'ensemble de toutes les applications de E dans U . Pour $\alpha \in \ddot{E}$ et $f \in \vec{E}$ la f-valeur de α , notée $\ddot{f}(\alpha)$, sera le tableau obtenu en remplaçant dans α tous les éléments de E par leurs images par f .

Un tableau α sera dit f-clos (resp. f-ouvert) si $\ddot{f}(\alpha)$ est clos (resp. ouvert), il sera dit infermable s'il est f-ouvert pour tout $f \in \vec{E}$, sinon il sera dit fermable.

Proposition 1 : Il y a équivalence entre :

- a) α est clos (resp. ouvert).
- b) α est f-clos (resp. f-ouvert) pour tout $f \in \vec{E}$ (resp. pour au moins un $f \in \vec{E}$).

Démonstration : il suffit de raisonner sur clos et f-clos.

- Si α est clos, toutes ses colonnes sont closes, soit l'une de ces colonnes dont le bloc supérieur est $B = x_1 \dots x_n$ et le bloc inférieur $B' = x'_1 \dots x'_n$, par hypothèse B et B' ont un élément commun, si c'est

un 1 ou un 0 il en sera de même pour les blocs correspondants de $\ddot{f}(\alpha)$, si c'est un élément ξ de E, alors $f(\xi)$ sera un élément commun aux blocs correspondants de $\ddot{f}(\alpha)$; $\ddot{f}(\alpha)$ sera donc clos.

- Si α est f-clos pour tout f, raisonnons par l'absurde en supposant que α possède au moins une colonne ouverte (B, B') , soient $\xi_1, \dots, \xi_n$ les éléments de B (resp. $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ les éléments de B') autres que 0 et 1 (s'il y en a); par hypothèse: $\xi_i \neq \xi'_j$ pour tout couple (i, j) , soit f ainsi définie :

$$f(u) = 1 \quad \text{si } u \text{ est l'un des } \xi_i \\ = 0 \quad \text{dans tous les autres cas.}$$

il est facile de constater que $\ddot{f}(\alpha)$ serait ouverte.

Remarques :

1) α infermable ne signifie pas que toutes ses colonnes soient ouvertes. Exemple :

$$\left\langle \begin{array}{ccc} 1x & 1 & 1 \\ 0 & 0x & 01 \end{array} \right\rangle$$

2) α fermable ne signifie pas qu'il possède au moins une colonne close. Exemple :

$$\left\langle \begin{array}{c} 1x \\ 0 \end{array} \right\rangle$$

3) "clos" implique "fermable"
"infermable" implique "ouvert".

Multiplication des tableaux

Etant donnés deux tableaux α et β , nous définirons le produit $\alpha.\beta$ de α par β comme étant le tableau obtenu en écrivant les colonnes de β à la suite de celles de α .

$$\left\langle \begin{array}{ccc} B_1 & & B_n \\ & \dots & \\ B'_1 & & B'_n \end{array} \right\rangle \cdot \left\langle \begin{array}{cc} C_1 & C_p \\ & \dots \\ C'_1 & C'_p \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cccc} B_1 & & B_n & C_1 & \dots & C_p \\ & \dots & & & & \\ B'_1 & & B'_n & C'_1 & \dots & C'_p \end{array} \right\rangle$$

(les lettres B et C désignent des blocs).

Disjonction de tableaux

Nous définirons la disjonction $\alpha \vee \beta$ de deux tableaux α et β de la façon suivante :

$$\left\langle \begin{array}{ccc} B_1 & & B_n \\ & \dots & \\ B'_1 & & B'_n \end{array} \right\rangle \vee \left\langle \begin{array}{cc} C_1 & C_p \\ & \dots \\ C'_1 & C'_p \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} D_1 & & D_{np} \\ & \dots & \\ D'_1 & & D'_{np} \end{array} \right\rangle$$

avec :

$D_1 = B_1 C_1$ (c'est à dire le bloc formé par la juxtaposition de B_1 et C_1)
 $D_2 = B_1 C_2$, ... , $D_p = B_1 C_p$, $D_{p+1} = B_2 C_1$, ... , $D_{2p} = B_2 C_p$, ... ,
 $D_{np} = B_n C_p$

et de même pour les blocs inférieurs.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1x \\ 0x & 0y \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1z & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11z & 11 & 1x1z & 1x1 \\ 0x0 & 0x0 & 0y0 & 0y0 \end{pmatrix}$$

Remarques

La multiplication et la disjonction que nous venons de définir sont des opérations associatives, ceci n'intervient d'ailleurs pas dans la suite, toutefois il est bon de la remarquer car cela nous permettra de simplifier les notations. Cette propriété d'associativité est évidente pour la multiplication; pour la disjonction nous pouvons la démontrer de la façon suivante :

Les lettres K et Q désignant des colonnes, considérons les tableaux :

$$\alpha = \langle K_1 \dots K_n \rangle \quad \beta = \langle K'_1 \dots K'_{n'} \rangle \quad \gamma = \langle K''_1 \dots K''_{n''} \rangle$$

et posons :

$$\alpha' = \alpha \vee (\beta \vee \gamma) = \langle Q'_1 \dots Q'_{nn'n''} \rangle$$

$$\alpha'' = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \langle Q''_1 \dots Q''_{nn'n''} \rangle$$

Cherchons la p-ième colonne de α' et de α'' ($1 \leq p \leq nn'n''$) :

1°) Pour α' , on commence par déterminer l'entier s tel que :

$$(s-1)n'n'' < p \leq sn'n'' \quad (1 \leq s \leq n)$$

posons $p = (s-1)n'n'' + t$ (1) avec $1 \leq t \leq n'n''$ (s et t sont uniques), Q'_p est alors la juxtaposition de K_s avec la t-ième colonne de $\beta \vee \gamma$.

On détermine alors l'entier r tel que : $(r-1)n'' < t \leq rn''$ ($1 \leq r \leq n'$) et on pose : $t = (r-1)n'' + u$ (2) avec $1 \leq u \leq n''$, on a alors :

$$Q'_p = K_s K'_r K''_u$$

2°) De façon analogue pour α'' : on détermine v tel que :

$$(v-1)n'' < p \leq vn'' \quad (1 \leq v \leq nn')$$

on pose : $p = (v-1)n'' + w$ (3) avec $1 \leq w \leq n''$

on détermine ensuite i tel que : $(i-1)n' < v \leq in'$ ($1 \leq i \leq n$)

on pose : $v = (i-1)n' + j$ (4) avec $1 \leq j \leq n'$

on a alors :

$$Q''_p = K_i K'_j K''_w$$

D'après (4) : $v-1 = (i-1)n' + j-1$, (3) devient alors :

$$p = (i-1)n'n'' + (j-1)n'' + w, \text{ or } 0 \leq (j-1)n'' \leq (n'-1)n''$$

et $1 \leq w \leq n''$, donc $1 \leq (j-1)n'' + w \leq n'n''$; en comparant avec (1) il en résulte : $i-1 = s-1$, donc $i = s$, et $(j-1)n'' + w = t$ que nous comparons avec (2), d'où $j-1 = r-1$, soit $j = r$, et $w = u$.

Donc $Q'_p = Q''_p$, et ceci quel que soit p, donc $\alpha' = \alpha''$.

Négation d'un tableau

a) Pour un tableau α n'ayant qu'une seule colonne : $\langle \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x'_1 \dots x'_{n'} \end{smallmatrix} \rangle$

on pose :

$$-\alpha = \left\langle \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & & 1 & 1x'_1 & 1x'_2 & & 1x'_{n'} \\ 0x_1 & 0x_2 & \dots & 0x_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\rangle \quad (n+n' \text{ colonnes})$$

b) Dans le cas général, si α a p colonnes : $\alpha = \langle K_1 K_2 \dots K_p \rangle$

posons $\alpha_i = \langle K_i \rangle$, l'associativité du produit nous permet d'écrire :

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_p$$

on pose alors :

$$-\alpha = -\alpha_1 v - \alpha_2 v \dots v - \alpha_p \quad \text{cette écriture étant justifiée}$$

par l'associativité de la disjonction.

Exemple :

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\langle \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0x & 0y \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0x \end{array} \right\rangle \cdot \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0y \end{array} \right\rangle \\ -\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0x \end{array} \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{ccc} 1 & 10 & 1x \\ 01 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \quad \text{et} \quad -\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0y \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} 1 & 10 & 1y \\ 01 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \\ -\alpha &= \left\langle \begin{array}{ccccccccc} 11 & 110 & 11y & 101 & 1010 & 101y & 1x1 & 1x10 & 1x1y \\ 0101 & 010 & 010 & 001 & 00 & 00 & 001 & 00 & 00 \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

THEOREME 1 : Pour $f \in E$ donnée :

- $\alpha \cdot \beta$ est f-clos, équivaut à : α et β sont f-clos.
- $\alpha v \beta$ est f-clos, équivaut à : α ou β est f-clos.
- $-\alpha$ est f-clos, équivaut à : α est f-ouvert.

Démonstration :

a) On remarque simplement que : $\ddot{f}(\alpha \cdot \beta) = \ddot{f}(\alpha) \cdot \ddot{f}(\beta)$, donc si $\alpha \cdot \beta$ est f-clos toutes les colonnes de $\ddot{f}(\alpha)$ et toutes les colonnes de $\ddot{f}(\beta)$ sont closes, et réciproquement.

b) On a également : $\ddot{f}(\alpha v \beta) = \ddot{f}(\alpha) v \ddot{f}(\beta)$; si $\alpha v \beta$ est f-ouvert, au moins une colonne K de $\ddot{f}(\alpha) v \ddot{f}(\beta)$ est ouverte, supposons que cette colonne soit la juxtaposition des colonnes K_i et K'_j de $\ddot{f}(\alpha)$ et de $\ddot{f}(\beta)$, le bloc supérieur de K ne comporte que des 1 et son bloc inférieur que des 0, il en est donc de même de K_i et de K'_j , donc α et β sont f-ouverts; et réciproquement.

c) Il suffit de raisonner dans le cas où α n'a qu'une colonne : si $-\alpha$ est f-clos, pour tout x_i : $x_i = 1$ ou $f(x_i) = 1$
pour tout x'_j : $x'_j = 0$ ou $f(x'_j) = 0$ (avec les notations précédentes).

Donc α est f-ouvert; et réciproquement.

Il en résulte alors les deux théorèmes suivants :

THEOREME 2 :

- a) $\alpha.\beta$ est clos, équivaut à : α et β sont clos.
- b) $\alpha.\beta$ est ouvert, équivaut à : α ou β est ouvert.
- c) $\alpha\vee\beta$ est fermable, équivaut à : α ou β est fermable.
- d) $\alpha\vee\beta$ est infermable, équivaut à : α et β sont infermables.
- e) α est clos (resp. ouvert, resp. fermable, resp. infermable), équivaut à : $\neg\alpha$ est infermable (resp. fermable, resp. ouvert, resp. clos).

THEOREME 3 :

- a) Si α ou β est infermable, alors $\alpha.\beta$ est infermable.
- b) Si $\alpha.\beta$ est fermable, alors α et β sont fermables.
- c) Si α ou β est clos, alors $\alpha\vee\beta$ est clos.
- d) Si $\alpha\vee\beta$ est ouvert, alors α et β sont ouverts.

Désignons par C_f l'ensemble des tableaux qui sont f-clos.

THEOREME 4 : $\vec{E}$ est un ensemble prébooléen pour la multiplication et la négation précédemment définies, et pour la famille déductive $(C_f)_{f \in \vec{E}}$.

Ceci résulte du théorème 1 précédent. Remarquons, en utilisant la proposition 1, que le puits de $\vec{E}$ n'est autre que l'ensemble des tableaux clos.

Nous allons voir que cet ensemble $\vec{E}$ possède certains caractères d'universalité, sans toutefois être vraiment un ensemble universel, mais le résultat partiel que nous allons établir nous permettra, au paragraphe suivant, de résoudre facilement un autre problème d'universalité concernant les anneaux booléens.

Envisageons le problème universel relatif aux données suivantes :

E_S : les ensembles quelconques.

E_T : les ensembles prébooléens.

(S,T)-applications : toutes les applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble prébooléen.

T-applications : les préhomomorphismes d'ensembles prébooléens.

Ces données vérifient les trois conditions requises (cf. Préliminaires), en effet :

U1/ Un isomorphisme est un préhomomorphisme.

U2/ Si g est un préhomomorphisme de $F(T,R)$ dans $F'(T',R')$, et g' un préhomomorphisme de F' dans $F''(T'',R'')$, alors $g'_o g$ est un préhomomorphisme de F dans F'' , car :

- a) $\neg g(x)$ est analogue dans F' à $g(\neg x)$, donc (prop.5, parag.1, chap. I) $g'(g(\neg x))$ est analogue dans F'' à $g'(\neg g(x))$, lui-même analogue à $\neg g'(g(x))$.
- b) $g(x.y)$ est analogue dans F' à $g(x).g(y)$, donc $g'(g(x.y))$ est analogue dans F'' à $g'(g(x).g(y))$, lui-même analogue à :

$$g'(g(x)).g'(g(y)).$$

c) $g(T) \subset T'$, donc $g'(g(T)) \subset g'(T') \subset T''$
 U3/ Vérification triviale.

Faisons alors correspondre à un ensemble quelconque E l'ensemble prébooléen $\ddot{E}$ que nous venons de construire, et l'application h de E dans $\ddot{E}$ définie par :

$$h(x) = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0x \end{array} \right\rangle$$

Soit $F(T, R)$ un autre ensemble prébooléen et f une application de E dans F ; définissons l'application g de $\ddot{E}$ dans F de la façon suivante :

- a) Pour un tableau α n'ayant qu'une colonne :
- si α est clos (resp. infermable), on pose : $g(\alpha) = e$ (resp. $g(\alpha) = -e$) où e est un élément fixé quelconque de T .
 - Si α n'est ni clos ni infermable : soit B (resp. B') son bloc supérieur (resp. inférieur), soit $\xi_1 \dots \xi_n$ (resp. $\xi'_1 \dots \xi'_n$) la sous-suite de B (resp. B') composée seulement d'éléments de $\ddot{E}$ (ces sous-suites ne peuvent pas être vides), on pose alors :

$$g(\alpha) = f(\xi'_1) \vee (\dots \vee (f(\xi'_n) \vee (-f(\xi_1) \vee (\dots \vee (-f(\xi_n)) \dots)))$$

- b) Si α possède p colonnes : on décompose α en produit de tableaux n'ayant qu'une seule colonne : $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_p$
 et l'on pose :

$$g(\alpha) = g(\alpha_1) \cdot (g(\alpha_2) \cdot (\dots \cdot (g(\alpha_{p-1}) \cdot g(\alpha_p)) \dots))$$

On vérifie aisément que g est un préhomomorphisme de $\ddot{E}$ dans F , en outre si $x \in E$:

$$g(h(x)) = g\left(\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0x \end{array} \right\rangle\right) = f(x) \quad \text{donc} \quad f = g_o h$$

Toutefois une décomposition analogue de f peut être obtenue avec un autre préhomomorphisme g' (ne serait-ce qu'en remplaçant e par un autre élément e' de T).

-3- Anneau booléen universel $\langle E \rangle$

Nous noterons $\langle E \rangle$ l'anneau booléen engendré par l'ensemble prébooléen $\tilde{E}$ précédent. Les éléments de $\langle E \rangle$ seront appelés des grilles; une grille, c'est à dire la classe d'analogie d'un tableau α , sera notée $\langle \alpha \rangle$, ou si l'on désire expliciter l'écriture du tableau α :

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} x_1 \dots x_n & & z_1 \dots z_p \\ x'_1 \dots x'_n & \dots & z'_1 \dots z'_p \end{array} \right\rangle$$

φ désignera toujours l'application canonique de $\tilde{E}$ dans $\langle E \rangle$. Rappelons qu'un ensemble déductif C_f de $\tilde{E}$ est l'ensemble des tableaux f-clos pour une application donnée f de E dans U , et que deux tableaux sont analogues si pour tout f ils sont tous deux f-clos ou tous deux f-ouverts.

Liste des cas usuels d'analogie pour deux tableaux α et β :

- 1°/ β est obtenu à partir de α par interversion de colonnes, ou par interversion d'éléments de $(E, 0, 1)$ à l'intérieur des blocs.
- 2°/ β est obtenu à partir de α par adjonction d'un certain nombre de colonnes qui s'y trouvaient déjà.
- 3°/ β est obtenu à partir de α par adjonction d'un certain nombre de colonnes closes.
- 4°/ β est obtenu à partir de α par adjonction à certains blocs de certains éléments de $(E, 0, 1)$ qui s'y trouvaient déjà.

Tout ceci se vérifie immédiatement et nous permettra bien souvent à partir d'un tableau donné de trouver un tableau analogue dont l'écriture sera beaucoup plus simple.

Exemple : le tableau $-\alpha$ (qui comporte 9 colonnes) calculé en exemple de la négation au paragraphe précédent, est tout simplement analogue à

$$\left\langle \begin{array}{c} 1xy \\ 0 \end{array} \right\rangle .$$

Nous dirons qu'une grille $\langle \alpha \rangle$ est f-close, f-ouverte, close, ouverte, fermable, infermable, suivant que l'un quelconque de ses représentants α possède l'une de ces qualités (ces définitions sont évidemment indépendantes du représentant choisi).

Il y a une seule grille close, elle sera notée $\langle 1 \rangle$, ou si l'on désire faire apparaître l'un de ses représentants :

$$\langle 1 \rangle = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 01 \end{array} \right\rangle$$

et une seule grille infermable, notée $\langle 0 \rangle = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\rangle$

Ces deux grilles sont les éléments neutres de $\langle E \rangle$.

A partir de $f \in \vec{E}$ nous avons déjà défini une application $\hat{f}$ (d'ailleurs un préhomomorphisme) de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$, nous définirons maintenant une application $\hat{f}$ de $\langle E \rangle$ dans $\langle E \rangle$ par :

$$\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle \hat{f}(\alpha) \rangle$$

α étant un représentant quelconque de $\langle \alpha \rangle$.

On définira également la f -valeur de la grille $\langle \alpha \rangle$ comme étant $\hat{f}(\langle \alpha \rangle)$. Cette définition est bien indépendante du représentant choisi, car si β est analogue à α :

- si α est f -clos, β aussi, $\hat{f}(\alpha)$ et $\hat{f}(\beta)$ sont clos, alors $\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle 1 \rangle$.
- si α est f -ouvert, β aussi, $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont infermables, et alors $\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle 0 \rangle$.

Remarquons qu'en fait les $\hat{f}$ sont des homomorphismes de $\langle E \rangle$ dans l'anneau booléen à deux éléments $\{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}$, que nous désignerons par $\hat{U}$, qui est d'ailleurs isomorphe à $\langle \emptyset \rangle$, isomorphe également à $\mathbb{Z}/(2)$.

Exemples d'opérations dans $\langle E \rangle$

$$1^\circ/ \text{ Multiplication : } \begin{pmatrix} 1 \\ 0x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1x \\ 0x & 0 \end{pmatrix} = \langle 0 \rangle$$

$$2^\circ/ \text{ Disjonction : } \begin{pmatrix} 1 \\ 0x \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1x \\ 0y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11x \\ 0x0y & 0x0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0xy \end{pmatrix}$$

$$3^\circ/ \text{ Négation : } - \begin{pmatrix} 1 \\ 0x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1x \\ 01 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mais bien entendu, comme dans tout anneau booléen, ces trois opérations ne sont pas indépendantes, on pourrait par exemple exprimer la disjonction au moyen de la multiplication et de la négation.

A partir de ces trois opérations fondamentales, nous définissons, comme dans tout anneau booléen, :

$$4^\circ/ \text{ Addition : } \langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle = (\langle \alpha \rangle \cdot \langle \beta \rangle) \vee (-\langle \alpha \rangle \cdot \langle \beta \rangle)$$

$$5^\circ/ \text{ Conditionnel : } \langle \alpha \rangle \rightarrow \langle \beta \rangle = \langle \alpha \rangle + \langle \alpha \rangle \cdot \langle \beta \rangle + \langle 1 \rangle = -\langle \alpha \rangle \vee \langle \beta \rangle$$

$$6^\circ/ \text{ Biconditionnel : } \langle \alpha \rangle \leftrightarrow \langle \beta \rangle = \langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle + \langle 1 \rangle = -(\langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle) \\ = (\langle \alpha \rangle \rightarrow \langle \beta \rangle) \cdot (\langle \beta \rangle \rightarrow \langle \alpha \rangle)$$

Problème universel

Nous nous proposons ici de résoudre le problème universel relatif aux données suivantes :

E_S : les ensembles quelconques.

E_T : les anneaux booléens.

(S, T) -applications : toutes les applications d'un ensemble quelconque dans un anneau booléen.

T -applications : les homomorphismes d'anneaux booléens.

Les trois conditions requises se vérifient immédiatement.

Ce problème est résolu de la façon suivante : associons à tout ensemble E l'anneau booléen $\langle E \rangle$ que nous venons de construire, et l'application $H = \varphi_o h$ (h étant l'application de E dans $\tilde{E}$ définie au paragraphe précédent), c'est à dire :

$$H(x) = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0_x \end{array} \right\rangle$$

Soit B un anneau booléen et f une application de E dans B ; nous pouvons considérer B comme un ensemble prébooléen muni de la structure normale, donc, d'après le paragraphe précédent, il existe au moins un préhomomorphisme g de E dans B tel que $f = g_o h$. Le théorème 2, parag.1, nous permet alors de dire : l'application G définie par $G(\varphi(x)) = g(x)$ est un homomorphisme de $\langle E \rangle$ dans B . Par ailleurs :

$$G_o H = G_o (\varphi_o h) = (G_o \varphi)_o h = g_o h = f.$$

Démontrons maintenant que cette décomposition est unique : en effet si $G'_o H$ en est une autre, les homomorphismes G et G' doivent coïncider sur $H(E)$, et il suffit alors de remarquer que toute grille est composée par multiplication, disjonction et négation de grilles "élémentaires" de la forme $H(x)$:

$$\left\langle \begin{array}{ccc} x_1 \dots x_n & & z_1 \dots z_p \\ x'_1 \dots x'_{n'} & \dots & z'_1 \dots z'_{p'} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} x_1 \dots x_n \\ x'_1 \dots x'_{n'} \end{array} \right\rangle \cdot \dots \cdot \left\langle \begin{array}{c} z_1 \dots z_p \\ z'_1 \dots z'_{p'} \end{array} \right\rangle$$

$$\text{et } \left\langle \begin{array}{c} x_1 \dots x_n \\ x'_1 \dots x'_{n'} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} 1x_1 \\ 0 \end{array} \right\rangle \vee \dots \vee \left\langle \begin{array}{c} 1x_n \\ 0 \end{array} \right\rangle \vee \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0_{x'_1} \end{array} \right\rangle \vee \dots \vee \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0_{x'_{n'}} \end{array} \right\rangle$$

$$\text{et } \left\langle \begin{array}{c} 1x_1 \\ 0 \end{array} \right\rangle = - \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0_{x_1} \end{array} \right\rangle$$

Autrement dit $\langle E \rangle$ est un anneau booléen libre.

THEOREME 1 : $\langle E \rangle$ et H , associés à E , sont universels pour le problème d'universalité envisagé.

Remarquons en outre que la condition U4 (cf. Préliminaires) est ici vérifiée :

Pour qu'une bijection F d'un anneau booléen B sur un anneau booléen B' soit un isomorphisme, il faut et il suffit que F et F^{-1} soient des homomorphismes.

Il en résulte :

THEOREME 2 : Tout autre anneau booléen universel, associé à E , pour ce même problème d'universalité, sera isomorphe à $\langle E \rangle$.

-4- Propriétés topologiques de l'anneau $\langle E \rangle$

Considérons l'ensemble $\mathcal{P}(\vec{E})$ que nous supposons muni de la structure habituelle d'anneau booléen. Soit Θ l'application de $\langle E \rangle$ dans $\mathcal{P}(\vec{E})$ définie par :

$\Theta(\langle \alpha \rangle) =$ ensemble des $f \in \vec{E}$ tels que $\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle 1 \rangle$.

THEOREME 1 : Θ est un homomorphisme biunivoque de $\langle E \rangle$ dans $\mathcal{P}(\vec{E})$.

Démonstration : le fait que Θ soit un homomorphisme résulte immédiatement du théorème 1, parag.2, c'est à dire :

$$\Theta(\langle 1 \rangle) = \vec{E} \quad \Theta(-\langle \alpha \rangle) = \vec{\Theta}(\langle \alpha \rangle) \quad \Theta(\langle \alpha \rangle \cdot \langle \beta \rangle) = \Theta(\langle \alpha \rangle) \cap \Theta(\langle \beta \rangle).$$

Supposons maintenant $\langle \alpha \rangle \neq \langle \beta \rangle$, les tableaux α et β n'étant pas analogues, il existe au moins un f tel que :

α soit f -clos et β f -ouvert
ou α soit f -ouvert et β f -clos.

Donc f appartiendra à l'un des ensembles $\Theta(\langle \alpha \rangle)$ et $\Theta(\langle \beta \rangle)$ mais pas à l'autre; Θ est donc biunivoque.

En vue d'une étude plus détaillée de $\langle E \rangle$ par rapport à $\mathcal{P}(\vec{E})$, nous allons établir le lemme suivant :

Lemme : Soient A et B deux parties finies et disjointes de $\vec{E}$, alors il existe au moins une grille $\langle \alpha \rangle$ qui soit f -close pour tout $f \in A$ et g -ouverte pour tout $g \in B$; nous dirons qu'une telle grille est A-close et B-ouverte.

Démonstration :

- si $A = B = \emptyset$: n'importe quelle grille convient.
- si $A = \emptyset \neq B$: la grille $\langle 0 \rangle$ convient.
- si $A \neq \emptyset = B$: la grille $\langle 1 \rangle$ convient.
- supposons maintenant A et B non vides, posons : $A = \{f_1, \dots, f_n\}$
 $B = \{g_1, \dots, g_p\}$

a) si $n = p = 1$: A et B étant disjointes on a $f_1 \neq g_1$, donc il existe $x \in E$ tel que $f_1(x) \neq g_1(x)$, pour cet x choisis :

- si $f_1(x) = 1$ et $g_1(x) = 0$: on prend $\langle \alpha \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0x \end{pmatrix}$
- si $f_1(x) = 0$ et $g_1(x) = 1$: on prend $\langle \alpha \rangle = \begin{pmatrix} 1x \\ 0 \end{pmatrix}$

Dans les deux cas $\langle \alpha \rangle$ est A-close et B-ouverte.

b) si $n \geq 1$ et $p = 1$: d'après a) :

- il existe $\langle \alpha_1 \rangle$ qui soit f_1 -close et g_1 -ouverte
- il existe $\langle \alpha_2 \rangle$ qui soit f_2 -close et g_1 -ouverte
- ...
- il existe $\langle \alpha_n \rangle$ qui soit f_n -close et g_1 -ouverte.

alors $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_1 \rangle \vee \langle \alpha_2 \rangle \vee \dots \vee \langle \alpha_n \rangle$ est bien A-close et B-ouverte.

c) si $n \geq 1$ et $p \geq 1$: d'après b) :

- il existe $\langle \alpha_1 \rangle$ qui soit A-close et g_1 -ouverte
- il existe $\langle \alpha_2 \rangle$ qui soit A-close et g_2 -ouverte
- ...
- il existe $\langle \alpha_p \rangle$ qui soit A-close et g_p -ouverte.

alors $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_1 \rangle . \langle \alpha_2 \rangle . \dots . \langle \alpha_p \rangle$ est bien A-close et B-ouverte.

THEOREME 2 : Si E est un ensemble fini de n éléments, alors $\langle E \rangle$ est isomorphe à $\mathcal{P}(\vec{E})$, et a pour nombre d'éléments : 2^{2^n} .

En effet : montrons que Θ est surjective :

Soit $A \in \mathcal{P}(\vec{E})$, posons $B = \bar{A}$, A et B sont deux parties finies et disjointes de $\vec{E}$, donc il existe une grille $\langle \alpha \rangle$ qui est A-close et B-ouverte, il en résulte : $A = \Theta(\langle \alpha \rangle)$.

Dans le cas où E est un ensemble infini, Θ n'est plus surjective, mais si nous identifions $\mathcal{P}(\vec{E})$ à $U^{\vec{E}}$, et que nous le munissions de la topologie produit (U étant muni de la topologie discrète), nous obtenons le résultat suivant :

THEOREME 3 : $\Theta(\langle E \rangle)$ est partout dense dans $\mathcal{P}(\vec{E})$

Démonstration :

Considérons un ensemble élémentaire de $U^{\vec{E}}$: $V = \prod_{f \in \vec{E}} U_f$
avec : $U_f \subset U$ pour tout f

$U_f = U$ sauf peut-être pour un nombre fini d'indices.

posons : A = ensemble des indices f tels que $U_f = \{1\}$
B = ensemble des indices f tels que $U_f = \{0\}$.

A et B sont deux parties finies et disjointes de $\vec{E}$, donc il existe une grille $\langle \alpha \rangle$ qui est A-close et B-ouverte.

$\Theta(\langle \alpha \rangle)$, en tant qu'élément de $U^{\vec{E}}$, est identifié à $(u_f)_{f \in \vec{E}}$
avec : $u_f = 1$ si $f \in \Theta(\langle \alpha \rangle)$
 $= 0$ sinon.

Donc :

$u_f = 1$ si $f \in A$, d'où $u_f \in U_f$
 $= 0$ si $f \in B$, d'où $u_f \in U_f$

et pour tout autre indice : $u_f \in U_f$, car alors $U_f = U$.

Il en résulte $\Theta(\langle \alpha \rangle) \in V$. Ainsi tout ensemble élémentaire contient un élément de $\Theta(\langle E \rangle)$, ce qui démontre le théorème.

Dans le cas où E est fini, avec n éléments, on a vu que $\langle E \rangle$ possède 2^{2^n} éléments, l'ensemble X de tous les ultrafiltres de $\langle E \rangle$ possède alors 2^n éléments, c'est à dire le même nombre d'éléments que $\vec{E}$; dans le cas infini ce résultat se généralise sous la forme suivante :

THEOREME 4 : L'ensemble X des ultrafiltres de $\langle E \rangle$ est équipotent à $\vec{E}$.

Démonstration :

Pour $f \in \vec{E}$, désignons par Γ_f l'ensemble des grilles f -closes, c'est à dire : $\Gamma_f = \psi(C_f)$.

Nous savons déjà que tous les Γ_f sont des ultrafiltres (proposition 4, parag.1).

Réciproquement, soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de $\langle E \rangle$, sa fonction caractéristique g est un homomorphisme de $\langle E \rangle$ dans $Z/(2)$; soit alors f l'application définie sur E par :

$$f(x) = g\left(\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0x \end{smallmatrix} \right\rangle\right) = g(H(x))$$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \hat{f}(H(x)) &= \hat{f}\left(\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0x \end{smallmatrix} \right\rangle\right) = \langle \hat{f}\left(\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0x \end{smallmatrix} \right\rangle\right) \rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0f(x) \end{smallmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0g(H(x)) \end{smallmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \hat{f}(H(x)) &= \langle 0 \rangle \quad \text{si } g(H(x)) = 0 \\ &= \langle 1 \rangle \quad \text{si } g(H(x)) = 1 \end{aligned}$$

En identifiant $Z/(2)$ et $\hat{U}$, les homomorphismes $\hat{f}$ et g sont donc identiques sur $H(E)$, et par suite, comme on l'a déjà vu, sont identiques sur $\langle E \rangle$.

$\mathcal{U}$ est l'ensemble des $\langle \alpha \rangle$ tels que $g(\langle \alpha \rangle) = 1$

Γ_f est l'ensemble des $\langle \alpha \rangle$ tels que $\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle 1 \rangle$

d'où $\mathcal{U} = \Gamma_f$

Ainsi l'application $\Gamma : f \longrightarrow \Gamma_f$ est une application de $\vec{E}$ sur X .

Considérons deux éléments différents f et g de $\vec{E}$: il existe $x \in E$ pour lequel $f(x) \neq g(x)$, supposons, par exemple, $f(x) = 1$ et $g(x) = 0$, alors la grille : $\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0x \end{smallmatrix} \right\rangle$ est f -close et g -ouverte, donc $\Gamma_f \neq \Gamma_g$. Donc Γ est biunivoque.

Du point de vue topologique ce théorème se complète de la façon suivante :

THEOREME 5 : U^E muni de la topologie produit des topologies discrètes est homéomorphe à l'espace booléen X (ou espace des ultrafiltres) dual de $\langle E \rangle$.

Démonstration :

Rappelons la topologie d'espace booléen sur X : d'après le

théorème de Stone, l'application σ qui à $\langle \alpha \rangle$ fait correspondre l'ensemble des ultrafiltres contenant $\langle \alpha \rangle$, est un isomorphisme de $\langle E \rangle$ dans $\mathcal{P}(X)$; l'ensemble $\mathcal{O}$ des parties de X qui sont réunions d'éléments de $\sigma(\langle E \rangle)$ peut alors être pris comme ensemble d'ouverts; X est alors un espace topologique compact, séparé au sens d'Haudorff, dans lequel tous les ofs (un "of" est un ensemble à la fois ouvert et fermé) sont tous les éléments de $\sigma(\langle E \rangle)$.

D'après le théorème 4, X est homéomorphe à U^E (identifié à $\tilde{E}$) muni de la topologie $\mathcal{C}_1$ dans laquelle les ouverts sont les images par Γ^{-1} des ouverts de X . Nous désignerons par $\mathcal{C}_2$ la topologie produit des topologies discrètes sur U^E . Montrons que les topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont identiques.

Soit Ω un ouvert de U^E dans $\mathcal{C}_1$: Ω est l'image par Γ^{-1} d'un ouvert de X , soit $\bigcup_{\alpha \in I} \sigma(\langle \alpha_i \rangle)$.

Pour toute grille $\langle \alpha \rangle$ on a $\Gamma^{-1}(\sigma(\langle \alpha \rangle)) = \mathcal{O}(\langle \alpha \rangle)$, en effet:
 $f \in \mathcal{O}(\langle \alpha \rangle)$ équivaut à : $\langle \alpha \rangle$ est f -close
 soit à : $\langle \alpha \rangle \in \Gamma_f$
 soit à : $\Gamma_f \in \sigma(\langle \alpha \rangle)$
 soit à : $f \in \Gamma^{-1}(\sigma(\langle \alpha \rangle))$

On a donc : $\Omega = \bigcup \mathcal{O}(\langle \alpha_i \rangle)$

Considérons une grille $\langle \alpha \rangle$, fixons l'un de ses représentants α , nous savons que la f -clôture de $\langle \alpha \rangle$ équivaut à celle du tableau α ; dans l'écriture de ce tableau α figure un nombre fini d'éléments de E , soient $x_1, \dots, x_n$, et la f -clôture de α ne dépend que des valeurs de f pour ces éléments x_i .

Ainsi la recherche des f -clôtures de $\langle \alpha \rangle$ se ramène à l'étude des 2^n applications de $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans U ; soient $f'_1, \dots, f'_p$ les restrictions différentes de tous les $f \in \mathcal{O}(\langle \alpha \rangle)$ à $\{x_1, \dots, x_n\}$ ($p \leq 2^n$), pour un x_i et un f'_j fixés posons :

$$U_{x_i}^j = \{f'_j(x_i)\}$$

et pour un j fixé :

$$\omega_j = \bigcap_{x \in E} U_x^j$$

avec :

$$\begin{aligned} U_x^j &= U & \text{si } x \text{ n'est pas l'un des } x_i \quad (i = 1, \dots, n) \\ &= U_{x_i}^j & \text{si } x = x_i \end{aligned}$$

Cet ensemble ω_j est un ensemble élémentaire de U^E (au sens de la topologie $\mathcal{C}_2$).

Donc l'ensemble $\omega = \bigcup_{j=1}^n \omega_j$ est un ouvert dans $\mathcal{C}_2$.

Soit $f \in \mathcal{O}(\langle \alpha \rangle)$, en tant qu'élément de U^E , il est identifié à $(f(x))_{x \in E}$, et si f'_j est la restriction de f à $\{x_1, \dots, x_n\}$, on a évidemment : $f \in \omega_j$, par suite $f \in \omega$.

Réciproquement, soit $f \in \omega$, il existe j tel que $f \in \omega_j$, la restriction de f à $\{x_1, \dots, x_n\}$ est alors f'_j , donc $f \in \mathcal{O}(\langle \alpha \rangle)$.

Ainsi $\bigoplus(\langle \alpha \rangle) = \omega$, donc $\Omega = \bigcup \bigoplus(\langle \alpha_i \rangle)$ est un ouvert dans la topologie $\mathcal{C}_2$.

Réciproquement, considérons un ensemble élémentaire de $\mathcal{C}_2$, soit $\bigcap_{x \in E} U_x$, avec $U_x = U$ sauf pour un nombre fini d'indices $x_1, \dots, x_n$.

Posons :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0x_i \end{array} \right\rangle & \text{si } U_{x_i} = 1 \\ &= \left\langle \begin{array}{c} 1x_i \\ 0 \end{array} \right\rangle & \text{si } U_{x_i} = 0 \end{aligned}$$

et soit $\alpha = \alpha_1. \dots. \alpha_n$.

Pour que α soit f-clos il faut et il suffit que tous les α_i soient f-clos, ce qui revient à dire que $f(x_i) \in U_{x_i}$ pour tout i , il en résulte :

$$\bigcap U_x = \bigoplus(\langle \alpha \rangle)$$

Donc tout ouvert dans la topologie $\mathcal{C}_2$ l'est également dans la topologie $\mathcal{C}_1$; ces deux topologies sont donc identiques.

Ce théorème nous permet donc de prendre tout simplement U^E muni de la topologie produit des topologies discrètes comme espace booléen dual de $\langle E \rangle$.

CHAPITRE II : TABLEAUX DE REDUCTION POUR LE CALCUL PROPOSITIONNEL

-1- Préliminaires

Dans tout ce chapitre nous utiliserons les notations suivantes pour le Calcul Propositionnel classique :

- $\mathcal{A}$: ensemble des atomes (formules se réduisant à une variable propositionnelle) notés $p, q, r, \dots$
 $\mathcal{F}$: ensemble des formules du calcul propositionnel, notées $P, Q, R, \dots$ construites au moyen des symboles logiques : $- \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$
 (N.B. Il s'agit des "well formed formulas" et non d'assemblages quelconques)
 $\mathcal{L}$: ensemble des formules démontrables.

Nous rappelons les définitions et résultats suivants :

- 1°/ Soit $J \subset \mathcal{F}$, on dit que la formule P est déductible sous les hypothèses de J , si $P \in J \cup \mathcal{L}$, ou s'il existe Q telle que Q et $Q \rightarrow P$ soient déductibles sous les hypothèses de J . Ceci est précisé par :
 2°/ "P est déductible sous les hypothèses de J" équivaut à : il existe une suite finie ("démonstration de P sous les hypothèses de J ") de formules $P_1, \dots, P_n$, telle que $P_n = P$, et pour chaque i , $1 \leq i \leq n$, l'une des conditions suivantes soit réalisée :
 a) $P_i \in J \cup \mathcal{L}$
 b) il existe $j < i$ et $k < i$ tels que : $P_j = P_k \rightarrow P_i$.

Ceci indique une construction de l'ensemble, que nous noterons $\mathcal{L}(J)$, des formules déductibles sous les hypothèses de J .

- 3°/ $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\emptyset)$
 4°/ Une partie J de $\mathcal{F}$ est dite compatible si $\mathcal{L}(J) \neq \mathcal{F}$, cela équivaut à dire qu'il n'existe aucune formule P telle que P et $\neg P$ soient déductibles sous les hypothèses de J .
 5°/ On appelle système déductif toute partie D de $\mathcal{F}$ telle que :

$$\mathcal{L}(D) = D \neq \mathcal{F}$$

 6°/ On appelle système déductif complet (en abrégé s.d.c.) toute partie V de $\mathcal{F}$ qui est un système déductif tel que pour toute formule P :

$$P \in V \quad \text{ou} \quad \neg P \in V$$

- 7°/ La relation R entre formules P et Q exprimée par : $P \leftrightarrow Q \in \mathcal{L}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{F}$: soit $\mathcal{F}/R$ l'espace quotient et φ l'application canonique de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}/R$, on définit

une structure d'anneau booléen sur $\mathcal{F}/R$, en posant :

$$\begin{aligned}\psi(P) \cdot \psi(Q) &= \psi(P \wedge Q) & -\psi(P) &= \psi(-P) \\ \psi(P) \vee \psi(Q) &= \psi(P \vee Q)\end{aligned}$$

8°/ Si V est un s.d.c., alors $\psi(V)$ est un ultrafiltre de $\mathcal{F}/R$.

Si U est un ultrafiltre de $\mathcal{F}/R$, alors $\psi^{-1}(U)$ est un s.d.c.
(ce qui prouve l'existence de s.d.c.).

9°/ Si V est un s.d.c., alors :

$$\begin{aligned}a) \quad (P \in V) &\iff (-P \notin V) \\ b) \quad (P \wedge Q \in V) &\iff (P \in V \text{ et } Q \in V)\end{aligned}$$

10°/ $\mathcal{Z}$ est l'intersection de tous les s.d.c.

On peut alors énoncer :

THEOREME 1 : $\mathcal{F}$ est un ensemble prébooléen pour les opérations $\wedge$ et $-$, et pour la famille déductive constituée par tous les s.d.c. de $\mathcal{F}$; le puits de $\mathcal{F}$ est alors $\mathcal{Z}$, la relation d'analogie n'est autre que la relation R de 7° ci-dessus, et, par suite l'anneau booléen engendré n'est autre que $\mathcal{F}/R$ déjà considéré.

Reprenons le problème universel envisagé au paragraphe 3, chap.I, relatif aux données suivantes :

E_S : ensembles quelconques

E_T : anneaux booléens

(S,T) -applications : toutes les applications d'un E_S dans un E_T

T -applications : homomorphismes d'anneaux.

Nous nous proposons de montrer que $\mathcal{F}/R$, associé à $\mathcal{Q}$, est universel pour ce problème.

Lemme 1 : Soit f une application quelconque de $\mathcal{Q}$ dans un anneau booléen B , il existe un prolongement et un seul f° de f à $\mathcal{F}$ vérifiant, quelles que soient les formules P et Q :

1. $f^\circ(-P) = -f^\circ(P)$
2. $f^\circ(P \wedge Q) = f^\circ(P) \cdot f^\circ(Q)$
3. $f^\circ(P \vee Q) = f^\circ(P) \vee f^\circ(Q)$
4. $f^\circ(P \rightarrow Q) = f^\circ(P) \rightarrow f^\circ(Q)$
5. $f^\circ(P \leftrightarrow Q) = f^\circ(P) \leftrightarrow f^\circ(Q)$

Démonstration : appelons $\mathcal{F}_n$ (n entier > 0) l'ensemble des formules comportant au plus n symboles logiques, et soit $\Pi(n)$ la proposition :

"Il existe une application et une seule f_n de $\mathcal{F}_n$ dans B , prolongeant f , et qui sur $\mathcal{F}_n$ vérifie les 5 conditions considérées".

a) $\Pi(0)$ est vraie, avec $f_0 = f$

b) Supposons $\Pi(n)$ vraie, et définissons l'application f_{n+1} de $\mathcal{F}_{n+1}$

$$\begin{aligned}\text{dans } B \text{ par : } f_{n+1}(P) &= f_n(P) & \text{si } P \in \mathcal{F}_n \\ &= -f_n(Q) & \text{si } P = -Q \\ &= f_n(Q) \cdot f_n(R) & \text{si } P = Q \wedge R \\ &= f_n(Q) \vee f_n(R) & \text{si } P = Q \vee R \\ &= f_n(Q) \rightarrow f_n(R) & \text{si } P = Q \rightarrow R \\ &= f_n(Q) \leftrightarrow f_n(R) & \text{si } P = Q \leftrightarrow R\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} P \text{ ayant} \\ \text{exactement} \\ n+1 \text{ symboles} \\ \text{logiques} \end{array}$$

f_{n+1} est ainsi bien définie sur $\mathcal{F}_{n+1}$, elle prolonge f_n et par suite f , elle vérifie bien sur $\mathcal{F}_{n+1}$ les 5 conditions requises, et elle est unique (tout cela se vérifie immédiatement).

La proposition $\Pi(n)$ est donc vraie pour tout n . Pour toute formule P posons alors :

$$f^\circ(P) = f_n(P) \quad n \text{ étant le nombre de symbo-}$$

les logiques de P .

f° applique $\mathcal{F}$ dans B , prolonge f , vérifie les 5 conditions requises, et c'est la seule telle application.

Lemme 2 : Le procédé décrit par le lemme 1 permet d'obtenir tous les préhomomorphismes (stricts) de $\mathcal{F}$ dans un anneau booléen B (muni de la structure normale).

Démonstration :

a) Soit f° une application de $\mathcal{F}$ dans B , construite ainsi que l'indique le lemme 1, f° conserve évidemment la multiplication et la négation.

En outre, si $P \in \mathcal{A}$, on a $f^\circ(P) = 1$, ceci se démontre par récurrence :

- vrai si P est un axiome (vérification simple).
- si $P \in \mathcal{A}$ et $P \rightarrow Q \in \mathcal{A}$ et si on suppose $f^\circ(P) = f^\circ(P \rightarrow Q) = 1$, alors $Q \in \mathcal{A}$ et : $f^\circ(P \rightarrow Q) = f^\circ(P) \rightarrow f^\circ(Q) = f^\circ(P) + f^\circ(Q).f^\circ(P)+1 = f^\circ(Q) = 1$

Donc $f^\circ(\mathcal{A}) \subset \{1\}$: f° est bien un préhomomorphisme.

b) Soit maintenant g un préhomomorphisme de $\mathcal{F}$ dans B , on a d'abord :

$$g(-P) = -g(P) \quad \text{et} \quad g(P \wedge Q) = g(P).g(Q)$$

en outre le théorème 2, parag.1, chap.I, nous indique que l'extension $\bar{g}$ de g , définie par $\bar{g}(\psi(P)) = g(P)$ est un homomorphisme de $\mathcal{F}/R$ dans B , il en résulte :

$$g(P \vee Q) = g(P) \vee g(Q) \quad g(P \rightarrow Q) = g(P) \rightarrow g(Q) \quad g(P \leftrightarrow Q) = g(P) \leftrightarrow g(Q)$$

g est donc bien une application répondant aux conditions du lemme 1.

Remarques

1°/ Tout préhomomorphisme de $\mathcal{F}$ dans B est donc entièrement caractérisé par sa restriction sur $\mathcal{A}$.

2°/ Pour que $P \in \mathcal{A}$, il faut et il suffit que $f(P) = 1$ pour tout préhomomorphisme de $\mathcal{F}$ dans B (théorème 4, parag.1, chap.I).

THEOREME 2 : L'anneau booléen $\mathcal{F}/R$ et l'application ψ' , restriction à $\mathcal{A}$ de l'application canonique ψ , associés à $\mathcal{A}$, sont universels pour le problème envisagé.

Démonstration :

Soit f une application quelconque de $\mathcal{A}$ dans un anneau booléen B ; à partir de f nous construisons le préhomomorphisme f° (lemme 1 et 2) de $\mathcal{F}$ dans B , puis l'extension $\bar{f}^\circ$ de f° définie par : $\bar{f}^\circ(\psi(P)) = f^\circ(P)$ qui est un homomorphisme de $\mathcal{F}/R$ dans B .

Si $p \in \mathcal{A}$: $\bar{f}^\circ(\psi'(p)) = \bar{f}^\circ(\psi(p)) = f^\circ(p) = f(p)$ donc $f = \bar{f}^\circ \circ \psi'$

En outre cette décomposition est unique, en effet soit F un autre homomorphisme de $\mathcal{G}/R$ dans B , tel que $f = F \circ \varphi'$:

$\bar{f} \circ \varphi$ et $F \circ \varphi$ sont deux préhomomorphismes de $\mathcal{G}$ dans B (théorème 3, parag.1, chap. I), coïncidant sur $\mathcal{A}$, car :

$$\bar{f}(\varphi(p)) = \bar{f}(\varphi'(\rho)) = f(p) = F(\varphi'(\rho)) = F(\varphi(p))$$

donc ils sont identiques, et par suite $\bar{f}$ et F sont identiques.

-2- Tableaux de réduction achevés

Le théorème 2, parag.1, chap.II, et le théorème 2, parag.3, chap.I, nous permettent d'énoncer :

THEOREME 1 : Les anneaux booléiens $\mathcal{F}/R$ et $\langle \mathcal{A} \rangle$ sont isomorphes.

Les propriétés d'universalité (cf. Préliminaires) nous permettent d'ailleurs de construire cet isomorphisme :

Rappelons que H désigne l'application de $\mathcal{A}$ dans $\langle \mathcal{A} \rangle$ définie par :

$$H(p) = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ \text{Op} \end{matrix} \right\rangle$$

$\langle \mathcal{A} \rangle$ et H étant universels : il existe un homomorphisme λ et un seul de $\langle \mathcal{A} \rangle$ dans $\mathcal{F}/R$ tel que : $\varphi' = \lambda \circ H$

$\mathcal{F}/R$ et φ' étant universels : il existe un homomorphisme μ et un seul de $\mathcal{F}/R$ dans $\langle \mathcal{A} \rangle$ tel que :

$$H = \mu \circ \varphi'$$

et nous savons que λ est un isomorphisme de $\langle \mathcal{A} \rangle$ sur $\mathcal{F}/R$, et μ un isomorphisme (réciproque de λ) de $\mathcal{F}/R$ sur $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Nous ne connaissons μ que par ses valeurs sur $\varphi'(\mathcal{A})$ (ou $\varphi(\mathcal{A})$), mais nous savons que cela suffit à le déterminer entièrement.

Ainsi :

- A toute classe $\varphi(P)$ de formules analogues, correspond une grille $\mu(\varphi(P))$ bien déterminée.
- En particulier à toute formule P correspond une grille bien déterminée $\mu(\varphi(P))$.
- A toute grille de $\langle \mathcal{A} \rangle$ correspond une classe bien déterminée de formules analogues.

Définitions :

- la grille $\mu(\varphi(P))$ sera dite le "tableau de réduction achevé" (en abrégé t.r.a.) de la formule P ; on notera : $r = \mu \circ \varphi$, c'est un pré-homomorphisme strict de $\mathcal{F}$ dans $\langle \mathcal{A} \rangle$ qui prolonge H .
- toute application f de $\mathcal{A}$ dans U sera dite un "ensemble de valeurs de vérité".
- toute application $\hat{f}_{or}$ de $\mathcal{F}$ dans $\hat{U}$, sera dite une f-vérification.
- une formule P sera dite f-exacte si $f(r(P)) = \langle 1 \rangle$, c'est à dire si $r(P)$ est f-close, et f-inexacte si $r(P)$ est f-ouverte.
- une formule P sera dite incompatible si elle est f-inexacte pour tout ensemble de valeurs de vérité, c'est à dire si $r(P)$ est inférable, sinon elle sera dite compatible, c'est à dire si elle est f-exacte pour au moins un f , ou si $r(P)$ est fermable.

THEOREME 2 : Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. P est une formule démontrable
2. P est f-exacte pour tout ensemble de valeurs de vérité
3. $r(P)$ est clos.

En effet, il y a équivalence entre :

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= 1 \text{ dans } \mathcal{F}/R \\ \mu(\varphi(P)) &= r(P) = \langle 1 \rangle \text{ dans } \langle \mathcal{Q} \rangle \\ r(P) &\text{ est clos} \\ r(P) &\text{ est f-clos pour tout } f \in \vec{\mathcal{Q}} \end{aligned}$$

Exemples de calcul de t.r.a.

Exemple 1 : $P = pvq \leftrightarrow (-p \rightarrow q)$

$$\begin{aligned} r(P) &= r(p)vr(q) \leftrightarrow (-r(p) \rightarrow r(q)) \\ &= r(p)vr(q) \leftrightarrow r(p)vr(q) \\ &= \langle 1 \rangle \end{aligned}$$

P est démontrable.

Exemple 2 : $P = -pvp$

$$r(P) = -r(p).r(p) = \langle 0 \rangle$$

P est incompatible.

Exemple 3 : $P = -(p \leftrightarrow q)$

$$\begin{aligned} r(P) &= -(r(p) \leftrightarrow r(q)) \\ &= r(p) + r(q) \\ &= (r(p).-r(q))v(-r(p).r(q)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(p) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0p \end{pmatrix} & r(q) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0q \end{pmatrix} & -r(p) &= \begin{pmatrix} 1p \\ 0 \end{pmatrix} & -r(q) &= \begin{pmatrix} 1q \\ 0 \end{pmatrix} \\ r(p).-r(q) &= \begin{pmatrix} 1 & 1q \\ 0p & 0 \end{pmatrix} & -r(p).r(q) &= \begin{pmatrix} 1p & 1 \\ 0 & 0q \end{pmatrix} \\ r(P) &= \begin{pmatrix} 11p & 11 & 1q1p & 1q1 \\ 0p0 & 0p0q & 00 & 00q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1pq \\ 0pq & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on en déduit :

P n'est pas démontrable

P est f-exacte si $f(p) \neq f(q)$, elle est donc compatible

P est f-inexacte si $f(p) = f(q)$.

Remarques

Ce procédé nous fournit exactement l'analyse des valeurs de vérité au sens de W.V.O.Quine.

Nous verrons au paragraphe suivant un procédé beaucoup plus rapide pour le calcul des t.r.a., qui mettra en évidence l'analogie avec les tableaux sémantiques de E.W.Beth.

-3- Opérations de réduction

Considérons l'ensemble $\vec{\mathcal{G}}$ des applications de $\mathcal{G}$ dans U, et désignons par $\vec{\Pi}$ le sous-ensemble de $\vec{\mathcal{G}}$ constitué par tous les préhomomorphismes de l'ensemble prébooléen $\mathcal{G}$ (théorème 1, parag.1, chap.II) dans U (U étant ici identifié à $\mathbb{Z}/(2)$ muni de la structure prébooléenne normale).

Proposition 1 : $\langle \vec{\mathcal{G}} \rangle$ est un ensemble prébooléen pour la multiplication et la négation de sa structure d'anneau booléen (parag.3, chap.I) et pour la famille déductive $(K_f)_{f \in \vec{\Pi}}$ K_f étant l'ensemble des grilles f-closes.

Ceci résulte immédiatement du fait que $(K_f)_{f \in \vec{\Pi}}$ est une sous-famille de $(K_f)_{f \in \vec{\mathcal{G}}}$.

Notations

1°/ On notera $\vec{\mathcal{G}}$ l'ensemble $\langle \vec{\mathcal{G}} \rangle$ lorsqu'il sera muni de la structure prébooléenne décrite par la proposition 1 précédente, ceci afin d'éviter toute confusion avec $\langle \mathcal{G} \rangle$ qui désigne ce même ensemble considéré comme anneau booléen ou comme ensemble prébooléen mais avec la structure normale. Les éléments de $\vec{\mathcal{G}}$ seront notés comme ceux de $\langle \mathcal{G} \rangle$, mais en remplaçant $\langle \rangle$ et $\langle \rangle$ par $\langle \rangle$ et $\langle \rangle$.

2°/ On notera $\{\mathcal{G}\}$ l'anneau booléen engendré par $\vec{\mathcal{G}}$. Remarquons que le puits de $\vec{\mathcal{G}}$ est l'ensemble des grilles qui sont f-closes pour tout préhomomorphisme. Si α est un élément de $\vec{\mathcal{G}}$, sa classe d'analogue, élément de $\{\mathcal{G}\}$, sera notée $\{\alpha\}$, ou si l'on désire expliciter l'écriture de α , ou de $\langle \alpha \rangle$:

$$\{\alpha\} = \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 \dots x_n & & z_1 \dots z_p \\ & \dots & \\ x_1' \dots x_n' & & z_1' \dots z_p' \end{array} \right\}$$

3°/ L'application canonique de $\vec{\mathcal{G}}$ dans $\{\mathcal{G}\}$ sera notée Φ

4°/ L'application identique de $\langle \mathcal{G} \rangle$ dans $\vec{\mathcal{G}}$ sera notée i

5°/ L'application canonique de $\vec{\mathcal{G}}$ dans $\langle \mathcal{G} \rangle$ sera notée Ψ

Opérations de réduction dans $\{\mathcal{G}\}$

Nous allons indiquer 10 types de transformations qui font passer d'un élément de $\vec{\mathcal{G}}$ à un élément analogue, c'est à dire qui laissent invariants les éléments de $\{\mathcal{G}\}$.

Si l'on s'intéresse uniquement à une certaine occurrence d'une certaine formule P dans un élément de $\{\mathcal{G}\}$, ce dernier sera écrit en abrégé :

$\left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?P? \\ \hline ? \\ \hline \end{array} \right\}$ ou $\left\{ \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?P? \\ \hline \end{array} \right\}$ (on isole la colonne intéressée).

$$\text{Réduction } (-\text{Inf}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?-P? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?P \\ \hline ?? \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{Réduction } (-\text{Sup}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?-P? \\ \hline ? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?? \\ \hline ?P \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{Réduction } (\wedge \text{Inf}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?P \wedge Q? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline ? & ? \\ \hline ?P? & ?Q? \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{Réduction } (\wedge \text{Sup}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?P \wedge Q? \\ \hline ? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?PQ? \\ \hline ? \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{Réduction } (\vee \text{Inf}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?P \vee Q? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?PQ? \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{Réduction } (\vee \text{Sup}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?P \vee Q? \\ \hline ? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline ?P? & ?Q? \\ \hline ? & ? \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{Réduction } (\rightarrow \text{Inf}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?P \rightarrow Q? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?P \\ \hline ?Q? \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{Réduction } (\rightarrow \text{Sup}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?P \rightarrow Q? \\ \hline ? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline ?Q? & ?? \\ \hline ? & ?? \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{Réduction } (\leftrightarrow \text{Inf}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?P \leftrightarrow Q? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline ?P & ?Q \\ \hline ?Q? & ?P? \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{Réduction } (\leftrightarrow \text{Sup}) \quad \left\{ \begin{array}{|c|} \hline ?P \leftrightarrow Q? \\ \hline ? \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline ?PQ? & ?? \\ \hline ? & ??Q \\ \hline \end{array} \right\}$$

N.B. Dans les réductions $(\wedge \text{Inf})$, $(\vee \text{Sup})$, $(\rightarrow \text{Sup})$, $(\leftrightarrow \text{Inf})$ et $(\leftrightarrow \text{Sup})$ il se produit un dédoublement de la colonne considérée.

La justification de ces réductions n'offre aucune difficulté, nous traiterons seulement 2 de ces cas à titre d'exemple :

Soit f un préhomomorphisme de $\mathcal{G}$ dans U

a) Réduction $(-\text{Inf})$:

$$\begin{aligned} \hat{f}\left(\left\langle \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?-P? \\ \hline \end{array} \right\rangle\right) &= \left\langle \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?-f(P)? \\ \hline \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline ?? \\ \hline \end{array} \right\rangle \text{ si } f(P) = 1 \\ &= \left\langle \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \right\rangle \text{ si } f(P) = 0 \text{ (suppression de la colonne qui devient close).} \end{aligned}$$

$$\hat{f}(\langle \begin{array}{c|c} ?P & \\ \hline & ?? \end{array} \rangle) = \langle \begin{array}{c|c} ?f(P) & \\ \hline & ?? \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c|c} ? & \\ \hline & ?? \end{array} \rangle \quad \text{si } f(P) = 1$$

$$= \langle \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \rangle \quad \text{si } f(P) = 0$$

Ainsi : $\langle \begin{array}{c|c} ? & \\ \hline & ?-P? \end{array} \rangle$ et $\langle \begin{array}{c|c} ?P & \\ \hline & ?? \end{array} \rangle$ ont la même f-valeur pour tout préhomomorphisme, donc $\langle \begin{array}{c|c} ? & \\ \hline & ?-P? \end{array} \rangle$ et $\langle \begin{array}{c|c} ?P & \\ \hline & ?? \end{array} \rangle$ sont analogues dans $\mathcal{F}(\cdot)$.

b) Réduction ($\rightarrow$ Sup) :

$$\hat{f}(\langle \begin{array}{c|c} ?P \rightarrow Q? & \\ \hline & ? \end{array} \rangle) = \langle \begin{array}{c|c} ?f(P) \rightarrow f(Q)? & \\ \hline & ? \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \rangle \quad \begin{array}{l} \text{si } f(P) = 1 \\ \text{et } f(Q) = 0 \end{array}$$

$$= \langle \begin{array}{c|c} ?? & \\ \hline ? & \end{array} \rangle \quad \text{dans les autres cas.}$$

$$\hat{f}(\langle \begin{array}{c|c|c} ?Q? & ?? & \\ \hline ? & ?P & \end{array} \rangle) = \langle \begin{array}{c|c|c} ?f(Q)? & ?? & \\ \hline ? & ?f(P) & \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \end{array} \rangle \quad \begin{array}{l} \text{si } f(P) = 1 \\ \text{et } f(Q) = 0 \end{array}$$

$$= \langle \begin{array}{c|c} ?? & \\ \hline ? & \end{array} \rangle \quad \text{dans les autres cas.}$$

etc...

Il suffit dans chaque cas d'utiliser l'une des 5 propriétés des préhomomorphismes (parag.1, chap.II, lemmes 1 et 2), ainsi que la liste des cas usuels d'égalités dans $\langle \mathcal{F} \rangle$ (parag.3, chap.I).

THEOREME 1 : Les trois anneaux booléiens $\mathcal{G}/R$, $\langle \mathcal{Q} \rangle$ et $\{\mathcal{G}\}$ sont isomorphes.

On pourrait pour cela montrer que $\{\mathcal{G}\}$ et l'application :

$p \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ Op \end{array} \right\}$ de $\mathcal{Q}$ dans $\{\mathcal{G}\}$, associés à $\mathcal{Q}$, sont universels pour le problème d'universalité envisagé au parag.3, chap.I; mais il est aussi simple de construire directement un isomorphisme de $\langle \mathcal{Q} \rangle$ sur $\{\mathcal{G}\}$:

Soit $\langle \alpha \rangle$ une grille de $\langle \mathcal{Q} \rangle$, c'est la classe d'analogie d'un tableau α de $\mathcal{Q}$, or $\mathcal{Q}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{G}$, donc α est également un tableau de $\mathcal{G}$ et par suite il lui correspond une grille, sa classe d'analogie dans $\langle \mathcal{G} \rangle$, que nous noterons ici $\langle \alpha \rangle'$, $i(\langle \alpha \rangle')$ élément de $\mathcal{G}$ (sera noté α' , et $\Phi(\alpha')$ élément de $\{\mathcal{G}\}$ sera noté $\{\alpha\}'$). L'application Γ définie par : $\Gamma(\langle \alpha \rangle) = \{\alpha\}'$ est alors l'isomorphisme cherché, en effet :

1°/ On définit bien ainsi une fonction : soit β un autre tableau ana-

logue à α dans $\mathcal{A}$: β et α ont la même f-valeur pour toute application f de $\mathcal{A}$ dans U, et donc aussi (puisqu'ils ne s'écrivent qu'à l'aide d'atomes) pour toute application de $\mathcal{F}$ dans U, donc $\langle \alpha \rangle' = \langle \beta \rangle'$, et par suite : $\{\alpha\}' = \{\beta\}'$

2°/ σ est un homomorphisme : en effet, remarquons que :

$$\sigma(\langle \alpha \rangle) = \Phi(i(\Psi(\alpha)))$$

où α est un représentant de $\langle \alpha \rangle$,

a) un représentant de $\neg \langle \alpha \rangle$ est $\neg \alpha$, donc $\sigma(\neg \langle \alpha \rangle) = \Phi(i(\Psi(\neg \alpha)))$, or $\neg \alpha$ considéré comme négation de α dans $\mathcal{A}$ est aussi négation de α dans $\mathcal{F}$, donc $\Psi(\neg \alpha) = \neg \Psi(\alpha)$, et par suite : $\sigma(\neg \langle \alpha \rangle) = \neg \sigma(\langle \alpha \rangle)$

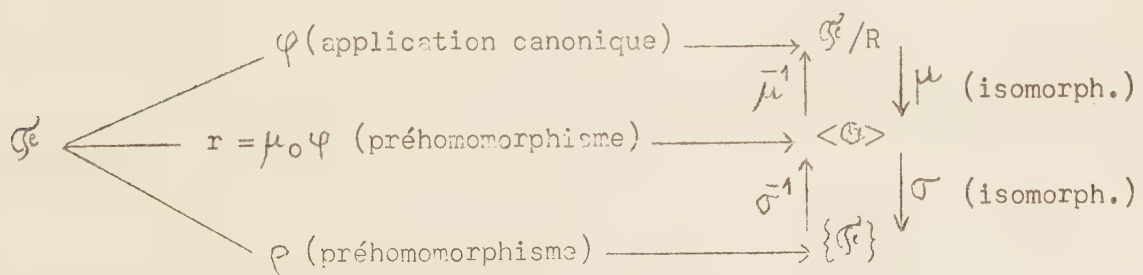
b) un représentant de $\langle \alpha \rangle . \langle \beta \rangle$ est $\alpha . \beta$, produit des tableaux α et β dans $\mathcal{A}$, mais c'est aussi le produit des tableaux α et β dans $\mathcal{F}$, donc : $\Psi(\alpha . \beta) = \Psi(\alpha) . \Psi(\beta)$, d'où $\sigma(\langle \alpha \rangle . \langle \beta \rangle) = \sigma(\langle \alpha \rangle) . \sigma(\langle \beta \rangle)$

3°/ σ est biunivoque : supposons $\sigma(\langle \alpha \rangle) = \sigma(\langle \beta \rangle)$, soit α (resp. β) un représentant de $\langle \alpha \rangle$ (resp. $\langle \beta \rangle$) : $\Phi(i(\Psi(\alpha))) = \Phi(i(\Psi(\beta)))$, donc $i(\Psi(\alpha))$ et $i(\Psi(\beta))$ sont analogues dans $\mathcal{F}$, c'est à dire que les grilles $\Psi(\alpha)$ et $\Psi(\beta)$ de $\langle \mathcal{F} \rangle$ ont la même f-valeur pour tout préhomomorphisme de $\mathcal{F}$ dans U, il en est donc de même des tableaux α et β de $\mathcal{A}$, et par suite α et β considérés comme tableaux de $\mathcal{A}$ ont la même f-valeur pour toute application de $\mathcal{A}$ dans U (car toute application de $\mathcal{A}$ dans U est la restriction d'un préhomomorphisme de $\mathcal{F}$ dans U); α et β sont donc analogues dans $\mathcal{A}$, et par suite : $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ dans $\langle \mathcal{A} \rangle$.

4°/ σ est surjective : soit $\{\alpha\}'$ un élément de $\{\mathcal{F}\}'$, les opérations de réduction montrent qu'au bout d'un nombre fini de telles opérations, $\{\alpha\}'$ pourra s'écrire uniquement au moyen d'atomes, donc aussi l'un de ses représentants α dans $\mathcal{F}$, donc aussi l'élément correspondant $\langle \alpha \rangle'$ de $\langle \mathcal{F} \rangle$, donc aussi l'un de ses représentants α dans $\mathcal{A}$, α sera alors élément de $\mathcal{A}$, on pourra considérer la grille $\langle \alpha \rangle$ de $\langle \mathcal{A} \rangle$, et il est facile de vérifier que : $\sigma(\langle \alpha \rangle) = \{\alpha\}'$.

Donc σ est bien un isomorphisme de $\langle \mathcal{A} \rangle$ sur $\{\mathcal{F}\}'$.

Nous avons le schéma suivant :



en posant $\rho = \sigma \circ r$: préhomomorphisme (strict) de $\mathcal{A}$ dans $\{\mathcal{F}\}'$.

Pour toute formule P, l'élément $\rho(P)$ sera dit le "tableau de réduction inachevé" (en abrégé t.r.i.) de P.

Proposition 2 : Pour toute formule P :

$$\wp(P) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ OP \end{array} \right\}$$

Démonstration : par récurrence sur le nombre total n de symboles logiques de P.

- si n = 0 : P est un atome p :

$$r(p) = \left\langle \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ Op \end{array} \right\rangle \right\rangle \quad \wp(p) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ Op \end{array} \right\}$$

-soit n un entier fixé, supposons le résultat vrai pour tout entier $m \leq n$; soit P une formule ayant n+1 symboles logiques, elle aura l'une des 5 formes suivantes : $\neg Q$, $Q \wedge R$, $Q \vee R$, $Q \rightarrow R$, $Q \leftrightarrow R$.

a) si $P = \neg Q$:

$$\wp(P) = \wp(\neg Q) = -\wp(Q) = - \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ OQ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1Q \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ O\neg Q \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ OP \end{array} \right\}$$

b) si $P = Q \wedge R$:

$$\wp(P) = \wp(Q) \cdot \wp(R) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ OQ \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ OR \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ OQ & OR \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ OQ \wedge R \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ OP \end{array} \right\}$$

etc...

Il suffit dans chaque cas d'utiliser une opération de réduction Inf.

Application au calcul des t.r.a.

Etant donnée une formule P, nous formons le t.r.i. de P sous sa forme "première" :

$$\wp(P) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ OP \end{array} \right\}$$

et en appliquant les opérations de réduction nous faisons ensuite disparaître tous les symboles logiques.

Exemple :

$$\wp(\neg(p \leftrightarrow q)) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ O\neg(p \leftrightarrow q) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \ p \leftrightarrow q \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1pq & 1 \\ 0 & Opq \end{array} \right\}$$

Remarque

Les 10 opérations de réduction que nous venons de définir, traduisent exactement les règles de constitution des tableaux sémantiques du Calcul Propositionnel (E.W.Beth).

-4- Application : calcul des formes normales

Rappelons qu'une formule P est dite normale conjonctive (resp. normale disjonctive) si :

- 1) Les seuls symboles logiques apparaissant dans P sont : $\wedge$ $\vee$ et $-$
- 2) Le symbole $-$ ne porte que sur des atomes
- 3) $\vee$ (resp. $\wedge$) ne relie que des atomes précédés ou non de $-$
- 4) Aucun atome ne figure plus d'une fois dans une disjonction (resp. conjonction).

Exemples : $(pvq) \wedge (-pvr)$ est normale conjonctive
 $(p \wedge q) \vee (-p \wedge r)$ est normale disjonctive

P étant une formule quelconque, toute formule normale conjonctive (resp. disjonctive) analogue à P , est dite une forme normale conjonctive (resp. disjonctive) de P .

THEOREME 1 : Les deux propositions suivantes sont équivalentes

- a) P n'est pas une formule démontrable
- b) P admet une forme normale conjonctive.

Démonstration :

1°/ Si P admet une forme normale conjonctive : $Q = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$ avec $Q_1 = g_1 \vee g_2 \vee \dots \vee g_p$, de même Q_2 , etc..., chaque g_i étant un atome éventuellement précédé de $-$.

Soit f l'ensemble de valeurs de vérité ainsi défini :

$f(p) = 0$ si p est l'un des g_i
 $= 1$ si $-p$ est l'un des g_i
 $= 0$ dans tous les autres cas.

$$\begin{aligned} - \text{ si } g_i = p : \quad r(g_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0p \end{pmatrix} & \hat{f}(r(g_i)) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} = \langle 0 \rangle \\ - \text{ si } g_i = -p : \quad r(g_i) &= \begin{pmatrix} 1p \\ 0 \end{pmatrix} & \hat{f}(r(g_i)) &= \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle 0 \rangle \end{aligned}$$

Donc tous les $r(g_i)$ sont f -ouverts, donc $r(Q_1)$ est f -ouvert, donc $r(Q)$ est f -ouvert, et P étant analogue à Q : $r(P)$ est f -ouvert, P est donc f -inexacte et par suite n'est pas démontrable.

2°/ Si P n'est pas une formule démontrable, posons :

$$r(P) = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n & z_1 \dots z_p \\ x'_1 \dots x'_{n'} & z'_1 \dots z'_{p'} \end{pmatrix}$$

$r(P)$ n'est pas close, donc possède au moins une colonne ouverte;

d'après la liste des cas usuels d'analogie (parag.3, chap.I) on peut faire les hypothèses suivantes :

- il n'y a aucune colonne closes dans $r(P)$
- il y a un seul 1 (et aucun 0) dans chaque bloc supérieur
- il y a un seul 0 (et aucun 1) dans chaque bloc inférieur
- tous les éléments d'un bloc quelconque sont distincts
- toutes les colonnes sont distinctes.

Ceci permet d'écrire :

$$r(P) = \left\langle \begin{array}{cc} 1p_1 \dots p_n & 1q_1 \dots q_p \\ 0p'_1 \dots p'_{n'} & 0q'_1 \dots q'_{p'} \end{array} \right\rangle \quad \text{où les } p_i, p'_i, q_i, q'_i \text{ sont des atomes.}$$

$$r(P) = \left\langle \begin{array}{c} 1p_1 \dots p_n \\ 0p'_1 \dots p'_{n'} \end{array} \right\rangle \cdot \dots \cdot \left\langle \begin{array}{c} 1q_1 \dots q_p \\ 0q'_1 \dots q'_{p'} \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{c} 1p_1 \dots p_n \\ 0p'_1 \dots p'_{n'} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0p'_1 \end{array} \right\rangle \vee \dots \vee \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0p'_{n'} \end{array} \right\rangle \vee \left\langle \begin{array}{c} 1p_1 \\ 0 \end{array} \right\rangle \vee \dots \vee \left\langle \begin{array}{c} 1p_n \\ 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0p'_1 \end{array} \right\rangle = r(p'_1) \quad \left\langle \begin{array}{c} 1p_1 \\ 0 \end{array} \right\rangle = -r(p_1) = r(-p_1)$$

$$\text{d'où } \left\langle \begin{array}{c} 1p_1 \dots p_n \\ 0p'_1 \dots p'_{n'} \end{array} \right\rangle = r(p'_1 \vee \dots \vee p'_{n'}, \vee -p_1 \vee \dots \vee -p_n) = r(Q_1)$$

les $n+n'$ atomes p'_i et p_i étant distincts.

D'une façon générale on pourra écrire :

$$r(P) = r(Q_1) \cdot r(Q_2) \cdot \dots \cdot r(Q_s) = r(Q)$$

$Q = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_s$ étant une formule normale conjonctive, et P est analogue à Q .

Notons que dans le cas où P est incompatible, $r(P) = \langle 0 \rangle$ se réduit à une seule colonne infermable et ne contenant aucun atome, mais dans ce cas on peut prendre comme forme normale conjonctive : $p \wedge \neg p$ où p est un atome quelconque.

Exemple : $P = \neg(p \leftrightarrow q)$

$$r(P) = \left\langle \begin{array}{cc} 1 & 1pq \\ 0pq & 0 \end{array} \right\rangle \quad (\text{calculé bien entendu au moyen des opérations de réduction}).$$

$$r(P) = \left[\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0p \end{array} \right\rangle \vee \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0q \end{array} \right\rangle \right] \cdot \left[\left\langle \begin{array}{c} 1p \\ 0 \end{array} \right\rangle \vee \left\langle \begin{array}{c} 1q \\ 0 \end{array} \right\rangle \right]$$

donc $(pq) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ en est une forme normale conjonctive.

THEOREME 2 : Les deux propositions suivantes sont équivalentes
 a) P est une formule compatible
 b) P admet une forme normale disjonctive.

Démonstration : les propositions suivantes sont équivalentes :

P est compatible

P est f-exacte pour au moins un ensemble de valeurs de vérité f

$$\hat{f}(r(P)) = \langle 1 \rangle$$

$$\hat{f}(r(\neg P)) = \langle 0 \rangle$$

$\neg P$ est f-inexacte

$\neg P$ n'est pas une formule démontrable

$\neg P$ admet une forme normale conjonctive Q'

$$r(\neg P) = r(Q')$$

$$r(P) = r(\neg Q')$$

Par ailleurs si Q' est une formule normale conjonctive

$$Q' = Q'_1 \wedge \dots \wedge Q'_n \quad \text{avec} \quad Q'_1 = g'_1 \vee \dots \vee g'_p \quad \text{etc...}$$

$$r(\neg Q') = \neg r(Q') = \neg(r(Q'_1) \dots r(Q'_n)) = \neg r(Q'_1) \vee \dots \vee \neg r(Q'_n)$$

$$\text{et } \neg r(Q'_1) = \neg(r(g'_1) \vee \dots \vee r(g'_p)) = \neg r(g'_1) \dots \neg r(g'_p)$$

$$\text{si } g'_1 \text{ est un atome } p_i : \neg r(g'_1) = r(\neg p_i)$$

$$\text{si } g'_1 = \neg p_i \text{ où } p_i \text{ est un atome : } \neg r(g'_1) = \neg r(\neg p_i) = r(p_i)$$

$$\text{donc : } \neg r(Q'_1) = r(g_1 \wedge \dots \wedge g_p) = r(Q_1) \quad \text{où les } g_i \text{ sont des atomes précédés ou non de } \neg, \text{ tous distincts.}$$

etc...

$r(\neg Q') = r(Q)$ où Q est une formule normale disjonctive; et réciproquement si Q est une formule normale disjonctive il existe une formule normale conjonctive Q' telle que $r(Q) = \neg r(Q')$.

Ceci nous fournit un premier procédé de calcul des formes normales disjonctives, consistant à chercher une forme normale conjonctive de $\neg P$.

Exemple : $P = \neg(p \leftrightarrow q)$

$$r(\neg(p \leftrightarrow q)) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{p \leftrightarrow q} = \begin{Bmatrix} 1p & 1q \\ 0q & 0p \end{Bmatrix}$$

$\neg P$ admet comme forme normale conjonctive : $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

P admet comme forme normale disjonctive : $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

Un second procédé plus simple de calcul des formes normales disjonctives est basé sur l'analyse des valeurs de vérité :

Exemple : Considérons la grille suivante (qui est le t.r.a. d'une certaine formule) :

$$\langle \alpha \rangle = \begin{pmatrix} lrp & lrp & lrp & lrps & lps & lps \\ 0 & Os & Oq & 0 & 0 & Oq \end{pmatrix}$$

Soit f un ensemble de valeurs vérité :

- si $f(p) = 0$: $\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle 1 \rangle$

- si $f(p) = 1$:

$$\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \begin{pmatrix} lf(r) & lf(r) & lf(r) & lf(r)f(s) & lf(s) & lf(s) \\ 0 & Of(s) & Of(q) & 0 & 0 & Of(q) \end{pmatrix}$$

cette grille est close si et seulement si : $f(r) = f(s) = 0$

Ainsi : $\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle 1 \rangle$ si et seulement si : p est f-inexacte
ou p est f-exacte et r et s
sont f-inexactes.

par suite : $\langle \alpha \rangle = r(-pv(p \wedge -r \wedge -s))$.

-5- Application : calcul des conséquences

Rappelons les définitions suivantes, concernant le Calcul Propositionnel :

- conséquence : couple, noté $J \vdash K$, de parties J et K de $\mathcal{F}^e$
- conséquence exacte : si pour tout s.d.c. $V : J \subset V$ implique $K \cap V \neq \emptyset$
- une conséquence $M \vdash N$ est dite une sous-conséquence de $J \vdash K$ si : MCJ et NCK .
- une conséquence $J \vdash K$ est dite une conséquence finie si $J \cup K$ est une partie finie de $\mathcal{F}^e$.

Remarques :

1) La conséquence $\emptyset \vdash \emptyset$ est inexacte, aussi dans tout ce paragraphe nous pourrions supposer que J et K ne sont pas simultanément vides.

2) "P est une formule démontrable" équivaut à : "la conséquence $\emptyset \vdash P$ est exacte"

Dans le but d'appliquer les méthodes précédentes à la recherche de l'exactitude ou de l'inexactitude des conséquences, nous allons établir auparavant deux lemmes :

Etant donnée $f \in \mathcal{Q}$, nous noterons E_f l'ensemble des formules qui sont f -exactes, c'est à dire les formules P telles que $r(P)$ soit f -close dans $\langle \mathcal{Q} \rangle$; de même, étant donné $F \in \overline{\mathcal{F}}$ (c'est à dire un pré-homomorphisme de $\mathcal{F}$ dans U), nous noterons $\mathcal{E}_F$ l'ensemble des formules P telles que $r(P)$ soit F -close dans $\{\mathcal{F}\}$.

Lemme 1 : Pour qu'une partie V de $\mathcal{F}^e$ soit un s.d.c. il faut et il suffit que sa fonction caractéristique g soit un préhomomorphisme de $\mathcal{F}$ dans U (identifié à $Z/(2)$).

Démonstration :

- Si V est un s.d.c. : $\varphi(V)$ est un ultrafiltre de $\mathcal{F}/R$, donc la fonction caractéristique χ de $\varphi(V)$ est un homomorphisme de $\mathcal{F}/R$ dans U , donc $\sigma_0 \varphi$ est un préhomomorphisme de $\mathcal{F}$ dans U , or $g = \sigma_0 \varphi$ car : si $\sigma(\varphi(P)) = 1$: $\varphi(P) \in \varphi(V)$, nous savons que cela équivaut à $P \in V$, soit à $g(P) = 1$.

- Si g est un préhomomorphisme de $\mathcal{F}$ dans U : l'application σ définie par $\sigma(\varphi(P)) = g(P)$ est un homomorphisme de $\mathcal{F}/R$ dans U , donc $\sigma^{-1}(1)$ est un ultrafiltre de $\mathcal{F}/R$, donc $\varphi^{-1}(\sigma^{-1}(1))$ est un s.d.c., qui n'est autre que V :

si $P \in V$: $g(P) = \sigma(\varphi(P)) = 1$, $P \in \varphi^{-1}(\sigma^{-1}(1))$

si $P \in \varphi^{-1}(\sigma^{-1}(1))$: $\sigma(\varphi(P)) = 1 = g(P)$, $P \in V$

Lemme 2 : Il y a identité entre les trois familles suivantes de parties de $\mathcal{G}$

- 1) $(E_f)_{f \in \vec{\mathcal{A}}}$ 2) $(\mathcal{E}_F)_{F \in \vec{\mathcal{A}}}$ 3) tous les s.d.c.

L'identité entre 1) et 2) est immédiate : si $f \in \vec{\mathcal{A}}$, $E_f = \mathcal{E}_F$ où F est le préhomomorphisme (unique) prolongeant f .

L'identité entre 2) et 3) résulte du lemme 1 : la fonction caractéristique de chaque $\mathcal{E}_F$ est F .

Ceci va nous permettre d'étendre aux conséquences la notion de f -exactitude : étant donné un ensemble de valeurs de vérité f , nous dirons que la conséquence $J \vdash K$ est une conséquence f -exacte si :

$$J \cap E_f \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad K \cap E_f \neq \emptyset$$

et sinon une conséquence f -inexacte, c'est à dire si :

$$J \subset E_f \quad \text{et} \quad K \cap E_f = \emptyset$$

Il est assez pratique d'introduire la notation $\neg J$ pour désigner l'ensemble des formules $\neg P$ où $P \in J$, on a alors la traduction suivante : $J \vdash K$ est f -exacte si : $(\neg J \cup K) \cap E_f \neq \emptyset$.

Proposition 1 : Pour que $J \vdash K$ soit exacte, il faut et il suffit qu'elle soit f -exacte pour tout $f \in \vec{\mathcal{A}}$.

Ceci résulte immédiatement des définitions et du lemme 2.

Remarque : " $\emptyset \vdash P$ est f -exacte" équivaut à " P est f -exacte".

Rappelons la définition de l'application $\textcircled{u}$ de $\langle \mathcal{A} \rangle$ dans $\mathcal{P}(\vec{\mathcal{A}})$ (qui pourra être identifié à $\mathcal{P}_4(U^{\mathcal{A}})$ ou à $U^{\vec{\mathcal{A}}}$, suivant les interprétations topologiques) :

$\textcircled{u}(\langle \omega \rangle) =$ ensemble des $f \in \vec{\mathcal{A}}$ tels que $\langle \omega \rangle$ soit f -close.

Nous en déduisons l'application $\textcircled{u}_{\text{or}}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}(\vec{\mathcal{A}})$:

$\textcircled{u}(\mathbf{r}(P)) =$ ensemble des $f \in \vec{\mathcal{A}}$ tels que P soit f -exacte.

D'une façon plus générale : soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des conséquences du calcul propositionnel, et soit $\wedge$ l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}(\vec{\mathcal{A}})$: $\wedge(J \vdash K) =$ ensemble des $f \in \vec{\mathcal{A}}$ tels que $J \vdash K$ soit f -exacte.

Nous pouvons identifier $\mathcal{C}$ à la partie de $\mathcal{C}$ constituée par toutes les conséquences du type $\emptyset \vdash P$, où P est une formule; nous aurons alors les résultats suivants :

Proposition 2 : Pour toute formule P : $\wedge(P) = \textcircled{u}(\mathbf{r}(P))$

Proposition 3 : Pour toute conséquence $J \vdash K$: $\wedge(J \vdash K) = \bigcup_{P \in J \cup K} \wedge(P)$

Du point de vue topologique, dans l'espace $U^{\mathcal{A}}$:

THEOREME 1 : a) $\wedge(\mathcal{C})$ est l'ensemble des ofs de $U^{\mathcal{A}}$
b) $\wedge(\mathcal{C})$ est l'ensemble des ouverts de $U^{\mathcal{A}}$

En effet, d'après le théorème 5, parag.4, chap.I, $U^{\mathcal{Q}}$ est l'espace booléen dual de $\langle \mathcal{Q} \rangle = r(\mathcal{F}^*)$, ce qui démontre a); de la proposition 3 ci-dessus il résulte que chaque $\bigwedge (J \vdash K)$ est un ouvert; et enfin, si 0 est un ouvert, il est réunion d'ofs, c'est à dire :

$$0 = \bigcup_{I \in I} \bigwedge (P_I)$$

soit, en posant $K = \{P_I\}_{I \in I}$: $0 = \bigwedge (J \vdash K)$

Le théorème 3, parag.4, chap.I, nous fournit un autre résultat topologique, mais dans l'espace $U^{\mathcal{Q}}$:

THEOREME 2 : $\bigwedge(\mathcal{F}) \subset \bigwedge(\mathcal{E}) \subset U^{\vec{\mathcal{Q}}}$
 $\bigwedge(\mathcal{F})$ et $\bigwedge(\mathcal{E})$ sont partout denses dans $U^{\vec{\mathcal{Q}}}$

Remarques

Le théorème 1 met en évidence le fait que l'analogie entre formules et conséquences s'arrête à la notion de f-exactitude, et ne pourra pas permettre une extension des opérations booléennes; autrement dit, on ne pourra pas définir pour les conséquences des tableaux de réduction (même en introduisant des tableaux infinis) pouvant se combiner algébriquement entre eux (bien que l'on puisse définir les tableaux sémantiques pour les conséquences comme pour les formules). Notons simplement qu'il est possible de définir la disjonction ou la conjonction de conséquences, mais non leur négation.

Par contre, en ce qui concerne les conséquences finies, la situation est tout à fait analogue à celle des formules :

Proposition 4 : Soit $J \vdash K$ une conséquence finie, posons $J = \{P_1, \dots, P_n\}$
 $K = \{Q_1, \dots, Q_p\}$
la f-exactitude (et par suite l'exactitude) de $J \vdash K$, équivaut à celle de la formule :
 $R(J \vdash K) = \neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee Q_1 \vee \dots \vee Q_p$

En effet, d'après la proposition 3 : $\bigwedge (J \vdash K) = \bigwedge (R(J \vdash K))$

On pourra donc définir le t.r.a. (ou le t.r.i.) d'une conséquence $J \vdash K$, comme étant celui de la formule $R(J \vdash K)$, ce qui permettra de faire l'analyse des valeurs de vérité, ou de rechercher l'exactitude, de $J \vdash K$, en partant de la forme "première" de son t.r.i. :

$$\rho(J \vdash K) = \left\{ \begin{array}{l} 1P_1 \dots P_n \\ 0Q_1 \dots Q_p \end{array} \right\}$$

et en appliquant les opérations de réduction.

Dans le cas général d'une conséquence infinie, les résultats topologiques précédents permettent de retrouver très simplement le théorème fondamental :

THEOREME 3 : Pour qu'une conséquence $J \vdash K$ soit exacte, il faut et il suffit qu'elle admette une sous-conséquence finie exacte.

En effet :

- Si $J \vdash K$ est exacte : $\bigwedge(J \vdash K) = \bigcup_{P \in -J \cup K} \bigwedge(P) = U^Q$

la famille des $\bigwedge(P)$ où P parcourt $-J \cup K$ forme donc un recouvrement d'ouverts de U^Q , qui est compact : on peut en extraire un recouvrement fini, composé, par exemple, des $(\bigwedge(-P_i))_1^n$ ($P_i \in J$) et des $(\bigwedge(Q_j))_1^m$ ($Q_j \in K$), alors :

$\{P_1, \dots, P_n\} \vdash \{Q_1, \dots, Q_m\}$ est une sous-conséquence finie exacte de $J \vdash K$.

- La réciproque est triviale.

CHAPITRE III : SUBSTITUTIONS ET QUANTIFICATEURS

-1- Ensemble individualisé

Nous définirons la structure d'ensemble individualisé au moyen des données suivantes :

- un ensemble non vide A , éléments notés $u, v, w, \dots$
- un ensemble infini I , éléments notés $a, b, c, \dots i, j, k, \dots$ et appelés individus.
- une application s de I^2 dans l'ensemble des applications de A dans lui-même; une fonction telle que $s(a, b)$ sera dite "substitution de a à b ", et lorsque aucune confusion ne sera à craindre, on la notera simplement (a/b) , sa valeur pour $u \in A$ sera alors notée $(a/b)u$. Si l'on est en présence de plusieurs individualisations différentes, on pourra préciser en disant que A est s -individualisé sur I .

Un élément u de A sera dit indépendant d'un individu a , si pour tout individu b : $(b/a)u = u$. On notera $i(a)$ l'ensemble des u indépendants de a , et I_u l'ensemble des individus dont dépend (c 'est à dire n'est pas indépendant) u ; I_u sera dit la base de u .

Ces données devant vérifier les axiomes suivants :

- I1/ $(a/a)u = u$ quels que soient $u \in A$ et $a \in I$
- I2/ si $b \neq a$, alors $(b/a)u$ est indépendant de a , quel que soit $u \in A$
- I3/ si u est indépendant de a : $(c/a)(a/b)u = (c/b)u$ quels que soient b et c
- I4/ pour tout u , I_u est une partie finie (éventuellement vide) de I .

Indépendance des axiomes d'individualisation

Axiome I1/

Prenons pour A un ensemble ayant au moins deux éléments, et soient u° et v° deux éléments différents fixés, soit également a° un individu fixé; définissons les substitutions de la façon suivante :

$$(b/a^\circ)u^\circ = v^\circ \quad \text{pour tout } b$$

$$(b/a)u^\circ = u^\circ \quad \text{pour tout } b \text{ et tout } a \neq a^\circ$$

$$(b/a)u = u \quad \text{quels que soient } a \text{ et } b, \text{ pour tout } u \neq u^\circ$$

$$\text{On a donc : } I_{u^\circ} = \{a^\circ\} \quad \text{et } I_u = \emptyset \text{ si } u \neq u^\circ$$

$$1) \text{ I1 n'est pas vérifié, car : } (a^\circ/a^\circ)u^\circ = v^\circ \neq u^\circ$$

$$2) \text{ I2 est vérifié}$$

$$3) \text{ I3 est vérifié :}$$

$$- \text{ pour } u \neq u^\circ : \text{ immédiat}$$

- pour $u = u^0$ avec $b \neq a^0$: $(c/a)(a/b)u^0 = (c/a)u^0 = u^0$ (car $a \neq a^0$)
 $\quad \quad \quad = (c/b)u^0$
 - pour $u = u^0$ avec $b = a^0$: $(c/a)(a/a^0)u^0 = (c/a)v^0 = v^0 = (c/a^0)v^0$
- 4) I4 est vérifié.

Axiome I2/

Prenons pour A l'ensemble I^2 des couples d'individus (i,j) , et définissons ainsi les substitutions :

- si $i \neq j$: $(b/a)(i,j) = (i,j)$ si $a \neq i$ et $a \neq j$
 $\quad \quad \quad (b/i)(i,j) = (b,j)$ quel que soit b
 $\quad \quad \quad (b/j)(i,j) = (i,b)$ " "
 $\quad \quad \quad (i,j)$ a donc pour base : $\{i,j\}$
- si $i = j$: $(b/a)(i,i) = (i,i)$ si $a \neq i$
 $\quad \quad \quad (b/i)(i,i) = (i,b)$ quel que soit b
 $\quad \quad \quad (i,i)$ a donc pour base : $\{i\}$

- 1) I1 est vérifié
- 2) I2 n'est pas vérifié, car si $b \neq i$: $(b/i)(i,i) = (i,b)$ qui dépend encore de i .
- 3) I3 est vérifié :
 - a) si $u = (i,j)$ avec $i \neq j$ (on aura donc $a \neq i$ et $a \neq j$) :
 - si $b \neq i$ et $b \neq j$: immédiat
 - si $b = i \neq j$: $(c/a)(a/i)(i,j) = (c/a)(a,j) = (c,j) = (c/i)(i,j)$
 - si $b = j \neq i$: analogue.
 - b) si $u = (i,i)$ (on aura donc $a \neq i$) :
 - si $b \neq i$: immédiat
 - si $b = i$: $(c/a)(a/i)(i,i) = (c/a)(i,a) = (i,c) = (c/i)(i,i)$
- 4) I4 est vérifié.

Axiome I3/

Prenons toujours $A = I^2$, soit a^0 un individu fixé, posons :

- pour un couple (a^0, j) où $j \neq a^0$:
 - $(b/a^0)(a^0, j) = (b, j)$
 - $(b/j)(a^0, j) = (a^0, b)$
 - $(b/a)(a^0, j) = (a^0, j)$ si $a \neq a^0$ et $a \neq j$
 Un tel couple dépend donc de a^0 et de j .
- pour le couple (a^0, a^0) :
 - $(b/a^0)(a^0, a^0) = (b, b)$
 - $(b/a)(a^0, a^0) = (a^0, a^0)$
 Ce couple ne dépend donc que de a^0
- pour tout couple (i, j) où $i \neq a^0$:
 - $(b/j)(i, j) = (i, b)$
 - $(b/a)(i, j) = i, j$ si $a \neq j$ (même si $a = i$)
 Un tel couple ne dépend donc que de j .

- 1) I1 est vérifié
- 2) I2 est vérifié
- 3) I3 n'est pas vérifié, par exemple : si $j \neq a^0$ $j \neq a$ $a \neq a^0$ et $c \neq a$ on a : $(c/a)(a/a^0)(a^0, j) = (c/a)(a, j) = (a, j)$
 $\quad \quad \quad (c/a^0)(a^0, j) = (c, j)$
- 4) I4 est vérifié.

Axiome I4/

Prenons pour A un ensemble où l'on peut choisir deux éléments différents u^o et v^o et posons :

$$\begin{aligned} (b/a)u^o &= v^o & \text{si } a \neq b \\ (a/a)u^o &= u^o \\ (b/a)u &= u & \text{si } u \neq u^o \end{aligned}$$

- 1) I1 est vérifié
- 2) I2 est vérifié
- 3) I3 est vérifié, car il ne peut s'appliquer qu'à $u \neq u^o$ et le résultat est alors trivial.
- 4) I4 n'est pas vérifié, car $I_{u^o} = I$

Exemples d'ensembles individualisés sur un ensemble infini I quelconque :

1°/ A est un ensemble quelconque et l'on prend pour chaque substitution l'application identique de A dans A : ce sera l'individualisation triviale de A.

2°/ I peut être individualisé sur lui-même en posant :

$$\begin{aligned} (a/b)i &= i & \text{si } b \neq i, \text{ quel que soit } a \\ (a/b)b &= a \end{aligned}$$

Nous dirons que c'est l'individualisation naturelle de I.

3°/ Si $A_1, \dots, A_n$ sont n ensembles individualisés sur le même ensemble I, on peut définir sur l'ensemble produit $A = A_1 \times \dots \times A_n$ ce que nous appellerons l'individualisation produit, par :

$$(a/b)(u_1, \dots, u_n) = ((a/b)u_1, \dots, (a/b)u_n)$$

ou d'une façon plus précise : si chaque A_i est s_i -individualisé, alors A est s-individualisé par :

$$s(a,b)(u_1, \dots, u_n) = (s_1(a,b)u_1, \dots, s_n(a,b)u_n)$$

En particulier I^n pourra être individualisé par le produit des n individualisations naturelles de I.

4°/ Si A est un ensemble individualisé, il y a une autre individualisation intéressante sur A^n :

- si $u = (u_1, \dots, u_n)$ où les u_i sont tous différents, on pose :

$$(a/b)u = ((a/b)u_1, \dots, (a/b)u_n)$$
- si $u = (u_1, \dots, u_n)$ où les u_i ne sont pas tous différents, on pose :

$$(a/b)u = u \quad \text{quels que soient } a \text{ et } b.$$

La vérification des axiomes ne présente guère de difficultés, elle est immédiate pour I1, I2, I4, et en ce qui concerne I3 :

- pour $u = (u_1, \dots, u_n)$ où les u_i ne sont pas tous différents : immédiat.
- si tous les u_i sont différents : u devant être indépendant de a, ceci implique que chaque u_i le soit, alors $(a/b)u = ((a/b)u_1, \dots, (a/b)u_n)$ où les $(a/b)u_i$ sont tous différents, car si l'on avait

$$(a/b)u_i = (a/b)u_j,$$

il en résulterait (en appliquant I1 et I3 à A) :

$$(b/a)(a/b)u_i = (b/a)(a/b)u_j, \quad \text{soit } u_i = u_j$$

par suite :

$$\begin{aligned} (c/a)(a/b)u &= ((c/a)(a/b)u_1, \dots, (c/a)(a/b)u_n) \\ &= ((c/b)u_1, \dots, (c/b)u_n) = (c/b)u \end{aligned}$$

L'individualisation ainsi définie sur A^n sera dite la n-in-dividualisation engendrée par celle de A.

5°/ Si A et B sont deux ensembles disjoints individualisés sur I, on peut définir sur $A \cup B$, l'individualisation somme par :

$(a/b)u$ calculé dans A si $u \in A$
calculé dans B si $u \in B$

Etudions quelques conséquences simples des axiomes d'individualisation : remarquons d'abord que si u dépend de a, cela signifie, par définition, qu'il existe au moins un individu b tel que $(b/a)u \neq u$ mais l'axiome I2 nous donne un résultat plus fort :

Lemme 1 : si u dépend de a, alors pour tout $b \neq a$: $(b/a)u \neq u$

Corollaire : pour que u soit indépendant de a il faut et il suffit qu'il existe $b \neq a$ tel que $u = (b/a)u$

Lemme 2 : si u est indépendant de a : $(b/a)(a/b)u = u$ pour tout b

C'est un cas particulier de I3.

Proposition 1 : Soit $v = (b/a)u$

1. si $b = a$ ou si $a \notin I_u$: alors $I_v = I_u$
2. si $b \neq a$ et si $a \in I_u$:
 - si $b \notin I_u$: $I_v = [I_u \cap \{a\}] \cup \{b\}$
 - si $b \in I_u$: $I_v \subset I_u \cap \{a\}$

Démonstration :

Soit $c \notin I_u$: $v = (b/a)u = (b/c)(c/a)u$ qui est indépendant de c si $c \neq b$, donc dans tous les cas : $I_v \subset I_u \cup \{b\}$

Le cas 1 est trivial, car $v = u$

Supposons donc $b \neq a$ et $a \in I_u$, et tout d'abord $b \notin I_u$:

D'après I2 v est indépendant de a, donc $I_v \subset [I_u \cap \{a\}] \cup \{b\}$ montrons qu'il y a égalité :

- supposons d'abord que v soit indépendant de b :

$(a/b)(b/a)u = u$ (lemme 2) soit $(a/b)v = u$ soit $v = u$ ce qui est impossible car u dépend de a. Donc $b \in I_v$.

- supposons maintenant que v soit indépendant de c $\in I_u \cap \{a\}$ (s'il y en a) : $(a/c)(c/b)v = (a/b)v$ (I3)
 $= (a/b)(b/a)u = u$

or $a \neq c$, u serait donc indépendant de c, ce qui est faux. Donc $c \in I_v$.
L'égalité est donc démontrée.

Dans le cas où $b \in I_u$ on a toujours $I_v \subset I_u \cup \{b\} = I_u$ et puisque $b \neq a$, v est indépendant de a, donc $I_v \subset I_u \cap \{a\}$.

Remarque

Dans le cas où $a \neq b$ et où u dépend de a et de b, l'inclusion qui vient d'être démontrée peut fort bien être stricte; en voici un exemple :

$A = I^2$ muni de la 2-individualisation engendrée par l'individualisation naturelle de I , et soient a et b deux individus différents :

$u = (a, b)$ a pour base $\{a, b\}$

$v = (b/a)u = (b/a)(a, b) = (b, b)$ a pour base $\emptyset$.

Proposition 2 : Si u dépend de a et si $b' \neq b''$, alors $(b'/a)u \neq (b''/a)u$ sauf peut-être pour un nombre fini de couples $(b', b'') \in I_u^2$

En effet, si u est indépendant de b' et de b'' , d'après la proposition 1, $(b'/a)u$ dépend de b' et pas de b'' , tandis que $(b''/a)u$ dépend de b'' et pas de b' , ces deux éléments sont donc différents. La conclusion subsiste si l'un seulement de b' et de b'' n'appartient pas à I_u .

Corollaire 1 : Si u dépend de a , l'ensemble des $(b/a)u$ où b parcourt I est équipotent à I .

Corollaire 2 : Tout ensemble fini ne peut être individualisé que trivialement.

Proposition 3 : Dans un ensemble individualisé non trivialement : si $a \neq b$ $i(a)$ et $i(b)$ sont incomparables (pour la relation d'inclusion).

Démonstration : supposons par exemple : $i(a) \subset i(b)$

Soit u un élément de base non vide (il en existe), et soit v l'élément ainsi défini :

- si u est indépendant de a et b : $v = u$

- si u dépend de a mais non de b :

$$v = (a'/a)u \text{ où } a' \neq b \text{ et } a' \notin I_u$$

- si u dépend de b mais non de a :

$$v = (b'/b)u \text{ où } b' \neq a \text{ et } b' \notin I_u$$

- si u dépend de a et de b :

$$v = (b'/b)(a'/a)u \text{ où } b' \neq a \text{ et } a' \notin I_u \text{ et } b' \notin I_{(a'/a)u}$$

Dans tous les cas, v est un élément de base non vide, indépendant de a et de b (cf. prop.1), et pour un tel élément v : soit $c \in I_v$: $(b/c)v$ est indépendant de a , donc par hypothèse $(b/c)v$ serait indépendant de b , ce qui contredit la proposition 1.

Applications individualisantes

Etant donnés deux ensembles A et A' individualisés sur le même ensemble d'individus I , une application f de A dans A' sera dite une application individualisante si :

$$f((a/b)u) = (a/b)f(u) \quad \text{quels que soient } a, b, u.$$

ou, d'une façon plus précise : si A est s -individualisé et A' est

s' -individualisé, alors :

$$f(s(a,b)u) = s'(a,b)f(u)$$

Pour une telle application :

Proposition 4 : Si u est indépendant de a , alors $f(u)$ aussi

car : $(b/a)f(u) = f((b/a)u) = f(u)$ pour tout b

Corollaire : $I_{f(u)} \subset I_u$ quel que soit u .

-2- Anneaux booléens et ensembles prébooléens individualisés

Anneau booléen individualisé

Soit B un anneau booléen (éléments notés : $r, s, t, \dots$) et I un ensemble infini d'individus ($a, b, c, \dots$); nous dirons que B est un anneau booléen individualisé sur I si c'est un ensemble individualisé sur I tel que chaque substitution d'individus soit un endomorphisme unitaire de B .

Remarquons que tout anneau booléen peut être individualisé trivialement sur tout ensemble infini I , et que c'est d'ailleurs la seule individualisation possible pour un anneau booléen fini.

Dans un anneau booléen B individualisé sur I nous avons les propriétés suivantes :

Proposition 1 : Pour tout individu a , $i(a)$ est un sous-anneau de B .

En effet :

1. $(b/a)0 = 0$ et $(b/a)1 = 1$ quel que soit b , donc 0 et 1 sont indépendants de a .
2. si r est indépendant de a : $(b/a)(-r) = -(b/a)r = -r$ quel que soit b , donc $-r$ est indépendant de a .
3. si r et s sont indépendants de a : $(b/a)(r.s) = (b/a)r.(b/a)s = r.s$ quel que soit b , donc $r.s$ est indépendant de a .

Nous pouvons généraliser ce résultat : J étant une partie quelconque de I , posons :

$i(J)$: ensemble des r indépendants de tout individu de J , c'est à dire tels que $I_r \cap J = \emptyset$

B_J : ensemble des r ne dépendant que d'individus de J , c'est à dire tels que $I_r \subset J$

On constate immédiatement : $i(J) = \bigcap_{a \in J} i(a)$

$$B_J = i\left(\bigcup J\right)$$

il résulte alors de la proposition 1 :

Corollaire 1 : Pour tout $J \subset I$: $i(J)$ et B_J sont des sous-anneaux de B .

Remarque :

$$i(\emptyset) = B_I = B$$

$$i(I) = B_\emptyset = \text{ensemble des } r \text{ de base vide.}$$

Il en résulte également le résultat suivant :

Corollaire 2 : Pour toute partie infinie J de I : B_J est un anneau booléen individualisé sur J .

Démonstration :

B_J sera évidemment individualisé en prenant pour substitutions les restrictions à B_J des substitutions dans B , ce qui est possible, car : si $r \in B_J$ $a \in J$ et $b \in J$: $(b/a)r \in B_J$

Proposition 2 : Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. r est indépendant de a
2. pour une infinité d'individus b : $(b/a)r \leq r$
3. pour une infinité d'individus b : $(b/a)r \geq r$

Démonstration :

Il est immédiat que 1 implique 2 et 3, car alors $(b/a)r = r$ pour tout b .

Supposons $(b/a)r \leq r$ pour une infinité de b , soit J l'ensemble des b pour lesquels cette inégalité est vérifiée, et posons $J' = J \cap \{a\}$. Tout endomorphisme d'un anneau booléen conserve évidemment la relation d'ordre, donc si $b \in J'$, pour tout individu c on a :

$$(c/a)(b/a)r \leq (c/a)r$$

or $b \neq a$, donc $(b/a)r$ est indépendant de a , on a donc simplement :

$$(b/a)r \leq (c/a)r$$

ceci sera en particulier vrai quels que soient b et c pris dans J' , l'inégalité contraire sera donc aussi vraie, et par suite :

$$(b/a)r = (c/a)r$$

et ceci pour une infinité de couples (b,c) avec $b \neq c$, donc (prop.2, parag. précédent) : r est indépendant de a . Donc 2 implique 1.

Démonstration analogue pour "3 implique 1" (on peut d'ailleurs se ramener à ce qui précède en raisonnant sur $\neg r$).

Corollaire 1 : S'il existe $b \notin I_r$ tel que : $(b/a)r \leq r$ ou $(b/a)r \geq r$ alors r est indépendant de a .

En effet, si $(b/a)r \leq r$, on en déduit : $(c/b)(b/a)r \leq (c/b)r$ pour tout c , or r étant indépendant de b , ceci s'écrit simplement :

$$(c/a)r \leq r$$

pour tout c ; donc r est indépendant de a .

De même pour l'inégalité contraire.

Corollaire 2 : Si r dépend de a et est indépendant de b' et b'' ($b' \neq b''$) alors $(b'/a)r$ et $(b''/a)r$ sont incomparables.

En effet, supposons par exemple : $(b'/a)r \leq (b''/a)r$

$$\text{alors } (a/b'')(b'/a)r \leq (a/b'')(b''/a)r$$

or $(b'/a)r$ est indépendant de b'' , d'où $(b'/a)r \leq r$
ce qui contredit que r dépende de a .

Ensemble prébooléen individualisé

Soit E un ensemble prébooléen :

éléments notés : $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

famille déductive que nous noterons ici : $(v_k)_{k \in K}$

puits : $T = \bigcap_K V_K$; relation d'analogie R, anneau booléen quotient E/R , application canonique φ de E dans E/R .

Soit d'autre part I un ensemble infini d'individus (a,b,c,...). Nous dirons que E est un ensemble prébooléen individualisé sur I si c'est un ensemble individualisé sur I tel que chaque substitution d'individus soit un préhomomorphisme de E dans lui-même.

Tout ensemble prébooléen peut être individualisé trivialement sur I, et c'est la seule individualisation possible si E est fini.

Nous allons voir que de l'individualisation de E résulte une individualisation "canonique" pour E/R : si (b/a) est une substitution d'individus sur E, d'après le théorème 2, parag.1, chap.I, on peut définir un endomorphisme de E/R , que nous noterons encore (b/a) , par :

$$(b/a)\varphi(\alpha) = \varphi((b/a)\alpha)$$

Lemme 1 : Pour que $(b/a)\varphi(\alpha) \stackrel{= \varphi(\alpha)}{=}$ quel que soit b, il faut et il suffit qu'il existe un représentant α^0 de $\varphi(\alpha)$ qui soit indépendant de a.

En effet :

- s'il existe α^0 indépendant de a :

$$(b/a)\varphi(\alpha) = (b/a)\varphi(\alpha^0) = \varphi((b/a)\alpha^0) = \varphi(\alpha^0) = \varphi(\alpha)$$

- si $(b/a)\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ pour tout b : soit b^0 un individu fixé différent de a, $\varphi(\alpha) = (b^0/a)\varphi(\alpha) = \varphi((b^0/a)\alpha)$, alors $\alpha^0 = (b^0/a)\alpha$ (où α est un représentant quelconque) convient bien.

Il est alors facile de vérifier les axiomes d'individualisation :

$$I1/ (a/a)\varphi(\alpha) = \varphi((a/a)\alpha) = \varphi(\alpha)$$

I2/ si $b \neq a$: $(b/a)\alpha$ est indépendant de a, or c'est un représentant de $(b/a)\varphi(\alpha)$, ce dernier est donc indépendant de a.

I3/ si $\varphi(\alpha)$ est indépendant de a : $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha^0)$ où α^0 est indépendant de a, $(c/a)(a/b)\varphi(\alpha) = (c/a)(a/b)\varphi(\alpha^0) = \varphi((c/a)(a/b)\alpha^0) = \varphi((c/b)\alpha^0) = (c/b)\varphi(\alpha^0)$

I4/ si $\varphi(\alpha)$ dépend de a : tous ses représentants aussi, donc $\varphi(\alpha)$ ne peut dépendre que d'un nombre fini d'individus.

Ainsi E/R est un anneau booléen individualisé sur I

Lemme 2 : Si $\varphi(\alpha)$ a une base non vide : il existe un représentant α^0 de $\varphi(\alpha)$ ayant la même base.

Démonstration : soit $a_1, \dots, a_n$ la base de $\varphi(\alpha)$, soit α un représentant quelconque de $\varphi(\alpha)$, il dépend au moins de $a_1, \dots, a_n$, supposons qu'il dépende en outre des individus $b_1, \dots, b_p$.

$(a_1/b_1)\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) = \varphi((a_1/b_1)\alpha)$ donc $\alpha_1 = (a_1/b_1)\alpha$ est un autre représentant de $\varphi(\alpha)$ et il ne dépend plus de b_1 .

$(a_1/b_2)\varphi(\alpha) = (a_1/b_2)\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha) = \varphi((a_1/b_2)\alpha_1)$ et $\alpha_2 = (a_1/b_2)\alpha_1$ ne dépend ni de b_1 , ni de b_2 . etc...

Finalement en prenant, par exemple, $\alpha^0 = (a_1/b_p) \dots (a_1/b_1)\alpha$,

c'est bien un représentant de $\varphi(\alpha)$, il ne peut dépendre que de $a_1, \dots, a_n$ et il en dépend effectivement.

Lemme 3 : Si $\varphi(\alpha)$ a une base vide, quel que soit a il existe un représentant α^a de $\varphi(\alpha)$, qui dépende au plus de a .

Démonstration : soit α un représentant quelconque de $\varphi(\alpha)$, si α a une base vide on prend $\alpha^a = \alpha$, si α dépend de $b_1, \dots, b_p$, on prend : $\alpha^a = (a/b_p) \dots (a/b_1) \alpha$ (cf. la démonstration du lemme 2).

Soit A un ensemble individualisé sur I , et construisons l'ensemble prébooléen $\tilde{A}$ (chap. I, parag. 2), nous pouvons définir sur $\tilde{A}$ une individualisation déduite "canoniquement" de celle de A :

Si α est un tableau de $\tilde{A}$, $(b/a)\alpha$ sera par définition le tableau obtenu en remplaçant dans α tous les éléments de A (s'il y en a) par leurs images par (b/a) .

On vérifie sans peine que $\tilde{\tilde{A}}$ est ainsi un ensemble individualisé sur I . En outre chaque substitution (b/a) ainsi définie est un pré-homomorphisme (strict) de $\tilde{A}$ dans lui-même, en effet :

1. (b/a) conserve évidemment la multiplication et la négation.
2. Soit $\alpha \in T$: α est f -clos pour tout $f \in \tilde{A}$, or quelle que soit $f \in \tilde{A}$, $f \circ (b/a)$ est aussi une application de A dans U , donc α est $f \circ (b/a)$ -clos, mais la $f \circ (b/a)$ -valeur de α est identique à la f -valeur de $(b/a)\alpha$, par suite $(b/a)\alpha$ est f -clos pour tout f : $(b/a)\alpha \in T$; d'où $(b/a)T \subset T$

Ainsi $\tilde{\tilde{A}}$ est un ensemble prébooléen individualisé sur I .

Lemme 4 : Soient $\alpha \in \tilde{\tilde{A}}$ et $u_1, \dots, u_n$ les éléments de A apparaissant dans α , alors :

$$I_\alpha = I_{u_1} \cup \dots \cup I_{u_n}$$

Démonstration :

- si $a \in I_\alpha$: il existe b tel que $(b/a)\alpha \neq \alpha$ donc pour l'un au moins des u_i : $(b/a)u_i \neq u_i$, c'est à dire u_i dépend de a .
- si l'un des u_i dépend de a : il existe b tel que $(b/a)u_i \neq u_i$ et par suite $(b/a)\alpha \neq \alpha$

A partir de $\tilde{\tilde{A}}$ nous pouvons maintenant construire l'anneau booléen $\langle A \rangle$ individualisé sur I (de façon canonique).

Lemme 5 : Si une grille $\langle \alpha \rangle$ de $\langle A \rangle$ a une base vide, alors il existe un tableau α^a de $\tilde{\tilde{A}}$, représentant $\langle \alpha \rangle$, ayant également une base vide.

Démonstration : d'après le lemme 3, il existe un tableau α^a qui dépend au plus d'un individu a (d'ailleurs arbitraire) et qui représente $\langle \alpha \rangle$; soit α^o le tableau déduit de α^a en y remplaçant tous les éléments de A qui dépendent effectivement de a par 0 . Ce tableau α^o a bien une base vide, montrons que α^o est analogue à α^a :

Soient $u_1, \dots, u_n$ les éléments de A dépendant de a , apparaissant dans α^a ; soit $f \in \vec{A}$

- si $f(u_1) = \dots = f(u_n) = 0$: α^0 et α^a ont la même f -valeur.
- s'il existe i tel que $f(u_i) = 1$: soit b un individu quelconque différent de a , $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha^a \rangle$ donc $(b/a)\langle \alpha \rangle = \langle \alpha \rangle = \langle \alpha^a \rangle = \langle (b/a)\alpha^a \rangle$ α^a et $(b/a)\alpha^a$ sont donc analogues.

pour chaque i , de 1 à n , $(b/a)u_i \neq u_i$; soit alors $f' \in \vec{A}$ qui coïncide avec f sauf peut-être pour les $(b/a)u_i$ où l'on pose : $f'((b/a)u_i) = 0$; α^0 et $(b/a)\alpha^a$ ont la même f' -valeur, donc aussi α^0 et α^a , mais pour ces deux derniers tableaux leurs f' -valeurs sont identiques à leurs f -valeurs; α^0 et α^a ont donc encore la même f -valeur.

Des lemmes 2 et 5 on déduit :

Proposition 3 : Toute grille $\langle \alpha \rangle$ de $\langle A \rangle$ admet un représentant α de $\vec{A}$ ayant la même base.

Problème d'universalité

Considérons le problème "universel" relatif aux structures et applications suivantes :

E_S : ensembles individualisés sur I

E_T : anneaux booléens individualisés sur I

(S, T) -applications : applications individualisantes

T -applications : homomorphismes individualisants.

Les conditions U_1, U_2, U_3, U_4 (cf. Préliminaires) se vérifient sans peine.

Ce problème est résolu de la façon suivante :

Proposition 4 : $\langle A \rangle$ et H , associés à un ensemble individualisant A , sont solution de ce problème d'universalité.

Démonstration :

Rappelons que H est définie par : $H(u) = \left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0_u \end{smallmatrix} \right\rangle$

et c'est bien une application individualisante de A dans $\langle A \rangle$.

Soit f une application individualisante de A dans un anneau booléen individualisé B , nous savons qu'il existe un homomorphisme G unique de $\langle A \rangle$ dans B tel que : $f = G \circ H$.

G est individualisant sur $H(A)$:

$$\begin{aligned} G\left(\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0_u \end{smallmatrix} \right\rangle\right) &= f(u) & G\left((b/a)\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0_u \end{smallmatrix} \right\rangle\right) &= G\left(\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0_{(b/a)u} \end{smallmatrix} \right\rangle\right) = f((b/a)u) \\ & & &= (b/a)f(u) = (b/a)G\left(\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0_u \end{smallmatrix} \right\rangle\right) \end{aligned}$$

En outre toute grille $\langle \alpha \rangle$ de $\langle A \rangle$ est composée par multiplication, disjonction et négation, de grilles élémentaires de la forme $H(u)$; il en résulte que G est individualisant sur $\langle A \rangle$.

-3- Anneau booléen quantifié

Soit B un anneau booléen (éléments $r, s, t, \dots$) individualisé sur I (éléments $a, b, c, \dots$).

Lemme 1 : Si $s = \sup_{b \in I} (b/a)r$ existe (pour a et r fixés), alors s est indépendant de a.

Démonstration :

pour tout b : $s \geq (b/a)r$

quels que soient b et c : $(c/a)s \geq (c/a)(b/a)r$

quels que soient $b \neq a$ et c : $(c/a)s \geq (b/a)r$

c étant fixé quelconque, choisissons b tel que : $b \neq a$ $b \notin I_r$

alors quel que soit d : $(d/b)(c/a)s = (c/a)s \geq (d/b)(b/a)r = (d/a)r$

il en résulte : $(c/a)s \geq s$, et ceci quel que soit c, donc s est indépendant de a (prop.2, parag.2, chap.III).

Rappelons les définitions et résultats suivants, concernant les quantificateurs (existentiels) monadiques tels que les définit P.R. Halmos :

1°) Un quantificateur monadique sur un anneau booléen B est une application $\exists$ de B dans B vérifiant les trois axiomes :

$$\begin{aligned} \exists 0 &= 0 \\ r &\leq \exists r \\ \exists(r.\exists s) &= \exists r.\exists s \end{aligned}$$

2°) Un sous-anneau B' de B est dit relativement achevé si pour tout $r \in B$, l'ensemble, noté $B'(r)$, des $r' \in B'$ tels que $r \leq r'$ (si $r \neq 0$, c'est un filtre de B') admet un plus petit élément (ce sera alors un filtre principal de B'). On démontre alors que si $\exists$ est un quantificateur sur B, $\exists(B)$ est un sous-anneau relativement achevé de B, et pour tout r, $\exists r$ est le plus petit élément de $\exists(B)(r)$. Réciproquement, si B' est un sous-anneau relativement achevé de B, il existe un quantificateur $\exists$ et un seul sur B tel que $\exists(B) = B'$, et il est défini par : $\exists r =$ le plus petit élément de $B'(r)$.

Dans le cas d'un anneau booléen individualisé on a alors le résultat suivant :

Lemme 2 : Si pour un individu a fixé, $\sup.(b/a)r$ lorsque b parcourt I, existe quel que soit r, alors l'application $\exists_a$ définie par $\exists_a r = \sup.(b/a)r$ est un quantificateur monadique sur B, et $\exists_a(B) = i(a)$.

Démonstration :

- on a vu que $i(a)$ était un sous-anneau de B.

- le lemme 1 montre que $\exists ar \in i(a)$
- il est immédiat que $\exists ar \geq r$, car $r = (a/a)r$, donc $\exists ar \in i(a)(r)$.
- soit $r' \in i(a)(r)$: r' est indépendant de a et $r' \geq r$, donc quel que soit b : $(b/a)r' = r' \geq (b/a)r$, il en résulte : $r' \geq \exists ar$.
Donc, pour tout r , $i(a)(r)$ admet un plus petit élément qui est $\exists ar$, ce qui prouve la proposition.

Nous dirons alors que B est un anneau booléen semi-quantifié sur I s'il vérifie l'axiome suivant :

BQ1/ quels que soient $a \in I$ et $r \in B$: $\exists ar = \sup_{b \in I} (b/a)r$ existe.

Remarques :

1°) Dans tout anneau booléen semi-quantifié, nous pourrions définir pour chaque individu le quantificateur universel $\forall a$ par : $\forall ar = -\exists a(-r)$ ou, ce qui revient au même : $\forall ar = \inf_{b \in I} (b/a)r$.

2°) Tout anneau booléen B peut être semi-quantifié sur tout ensemble infini I , en prenant l'individualisation triviale; dans ce cas $\exists ar = \forall ar = r$ quels que soient a et r . Nous dirons que B est semi-quantifié trivialement (c'est d'ailleurs le seul cas possible pour un anneau fini).

Outre les propriétés classiques des quantificateurs monadiques, nous avons dans un anneau booléen semi-quantifié les résultats suivants :

Proposition 1 : $I_{\exists ar} \subset I_r \cap \bigcup \{a\}$

Démonstration :

- on sait déjà que $\exists ar$ est indépendant de a .
- soit maintenant $b \neq a$ tel que r soit indépendant de b : $\exists ar \geq r$, donc pour tout c : $(c/b)\exists ar \geq (c/b)r = r$
si $c \neq a$ $(c/b)\exists ar$ est indépendant de a , et dans ce cas, pour tout d :
 $(d/a)(c/b)\exists ar = (c/b)\exists ar \geq (d/a)r$
donc $(c/b)\exists ar \geq \exists ar$ pour tout $c \neq a$; il en résulte que $\exists ar$ est indépendant de b .

Proposition 2 : Si r est indépendant de a' : $\exists ar = \exists a'(a'/a)r$

En effet : quel que soit b $(b/a')(a'/a)r = (b/a)r$

Proposition 3 : Si r et s sont indépendants de b et si $(b/a)r \leq s$ alors $\exists ar \leq s$.

En effet : $s \in i(b)((b/a)r)$ donc $s \geq \exists b(b/a)r = \exists ar$

Proposition 4 : Pour toute partie infinie J de I : $\exists ar = \sup_{b \in J} (b/a)r$

Démonstration :

- on a $\exists ar \geq (b/a)r$ a fortiori pour tout $b \in J$
- soit $s \geq (b/a)r$ pour tout $b \in J$: on peut trouver un individu b tel que $b \in J$ et $b \notin I_r \cup I_s$, de la proposition 3 il résulte alors $s \geq \exists ar$.

Corollaire : Pour toute partie infinie J de I , B_J est un anneau booléen semi-quantifié sur J .

En effet il suffit de se reporter à l'individualisation de B_J sur J telle qu'elle a été définie au paragraphe précédent. Notons que pour tout $a \in J$ le quantificateur $\exists a$ sur B_J est la restriction de ce même quantificateur défini sur B .

Proposition 5 : Deux fonctions composées de n quantificateurs $\exists a_1, \dots, \exists a_n$ ne différant que par l'ordre des individus, sont deux quantificateurs monadiques identiques.

Démonstration : montrons, par récurrence sur n , que $Q = \exists a_{10} \dots \exists a_n$ est un quantificateur.

La proposition est trivialement vraie pour $n = 1$, supposons la vraie pour $n-1$, posons : $Q = \exists a_{10} Q_1$ avec $Q_1 = \exists a_{20} \dots \exists a_n$

$$Q0 = \exists a_1(Q_1 0) = \exists a_1 0 = 0 \quad \text{et} \quad r \leq \exists a_1 r \leq \exists a_1 Q_1 r = Qr$$

$$Q(r.Qs) = \exists a_1 Q_1(r.\exists a_1 Q_1 s), \quad Q_1 s \text{ est indépendant de } a_2, \dots, a_n, \text{ donc}$$

$$\text{aussi } \exists a_1 Q_1 s; \text{ en outre } Q_1(B) = i(a_2, \dots, a_n), \text{ donc } \exists a_1 Q_1 s = Q_1 \exists a_1 Q_1 s,$$

d'où :

$$Q(r.Qs) = \exists a_1 Q_1(r.Q_1 \exists a_1 Q_1 s) = \exists a_1(Q_1 r.Q_1 \exists a_1 Q_1 s) = \exists a_1(Q_1 r.\exists a_1 Q_1 s)$$

$$= \exists a_1 Q_1 r.\exists a_1 Q_1 s = Qr.Qs \quad . \quad Q \text{ est donc bien un quantificateur.}$$

En outre $Q(B) = i(a_1, \dots, a_n)$: invariant par toute permutation.

N.B. En général le composé de deux quantificateurs monadiques n'est pas un quantificateur monadique.

Notation : si K est une partie finie de I , nous poserons :

$$\begin{aligned} \exists K &= \exists a_{10} \dots \exists a_n \quad \text{si } K = \{a_1, \dots, a_n\} \\ &= \text{application identique si } K = \emptyset. \end{aligned}$$

Proposition 6 : L'application $\exists$ définie par : $\exists r = \exists I_r r$ est un quantificateur monadique.

Démonstration : d'après la proposition 5 cette application est bien définie, et nous remarquons que : $\exists(B) = B\emptyset$.

Il est immédiat que : $\exists 0 = 0$ et $r \leq \exists r$

Considérons maintenant deux éléments r et s , soit $K = I_r \cup I_s$, K contient les bases de r , de s , et de $r.\exists s$, il en résulte : $\exists K r = \exists I_r r$,

et de même pour s et r. $\exists s$, par suite :

$$\exists(r.\exists s) = \exists K(r.\exists Ks) = \exists Kr.\exists Ks = \exists r.\exists s$$

Etudions maintenant l'effet des substitutions sur un quantificateur $\exists a$, nous avons les résultats partiels suivants :

Proposition 7 / Si $c \neq a$: $\exists a(c/b)r \leq (c/b)\exists ar$

En effet : $r \leq \exists ar$ donc $(c/b)r \leq (c/b)\exists ar$, or $(c/b)\exists ar$ est indépendant de a, donc $(c/b)\exists ar \in i(a)((c/b)r)$, ce qui prouve l'inégalité envisagée.

Proposition 8 : Si $c \neq a$ et $b \neq a$, on a : $\exists a(c/b)r = (c/b)\exists ar$ lorsque $b = c$, ou lorsque r est indépendant de l'un au moins des individus a,b,c.

En effet :

- Si $b = c$, ou si r est indépendant de a ou de b : le résultat est trivial.

- Si r est indépendant de c, et on peut maintenant supposer $b \neq c$:

$(b/c)\exists a(c/b)r$ est indépendant de a

$$(b/c)\exists a(c/b)r \geq (b/c)(c/b)r = r$$

$$\text{donc : } (b/c)\exists a(c/b)r \geq \exists ar$$

$\exists a(c/b)r$ est indépendant de b, donc :

$$(c/b)(b/c)\exists a(c/b)r = \exists a(c/b)r \geq (c/b)\exists ar$$

et la proposition 7 prouve l'inégalité contraire.

Dans le cas où r dépend effectivement de a,b,c et où ces trois individus sont différents, l'égalité précédente n'est pas forcément réalisée; nous poserons alors la définition suivante :

B sera dit un anneau booléen quantifié (*) sur I, s'il est semi-quantifié sur I et vérifie l'axiome supplémentaire :

BQ2/ Si a,b,c, sont 3 individus différents et si r dépend de a,b,c, alors : $(c/b)\exists ar \leq \exists a(c/b)r$

Il résulte alors de ce qui précède :

Proposition 9 : Dans un anneau booléen quantifié : si $b \neq a$ et $c \neq a$ on a : $\exists a(c/b)r = (c/b)\exists ar$

Soient B et B' deux anneaux booléens quantifiés sur le même ensemble d'individus I, une application f de B dans B' sera dite un

(*) Nous verrons au paragraphe 5 des exemples d'anneaux booléens semi-quantifié mais non quantifiés.

homomorphisme quantifié, si :

HQ1/ f est un homomorphisme d'anneaux

HQ2/ f est une application individualisante

HQ3/ $f(\exists ar) \leq \exists af(r)$ quels que soient a et r .

Proposition 10 : Si f est un homomorphisme quantifié : $f(\exists ar) = \exists af(r)$
 $f(\forall ar) = \forall af(r)$
 quels que soient a et r .

En effet : $\exists ar \geq (b/a)r$ pour tout b , donc $f(\exists ar) \geq f((b/a)r) = (b/a)f(r)$
 pour tout b , donc $f(\exists ar) \geq \exists af(r)$, d'où l'égalité d'après HQ3.

Une application N d'un anneau booléen quantifié B dans $Z/(2)$ sera dite une normalisation de B si :

N1/ N est un homomorphisme d'anneaux

N2/ $N(\exists ar) \leq \sup_{b \in I} N((b/a)r)$ quels que soient a et r .

Proposition 11 : Si N est une normalisation : $N(\exists ar) = \sup N((b/a)r)$
 $N(\forall ar) = \inf N((b/a)r)$
 quels que soient a et r .

Démonstration immédiate.

Proposition 12 : Tout homomorphisme quantifié de B dans $Z/(2)$ (ce dernier étant évidemment quantifié trivialement) est une normalisation.

Démonstration : soit f un homomorphisme quantifié de B dans $Z/(2)$
 $f(\exists ar) = \exists af(r) = f(r)$ et $\sup f((b/a)r) = \sup (b/a)f(r) = f(r)$

N.B. La réciproque est en général inexacte (il faudrait $N((b/a)r) = N(r)$ quels que soient a, b, r).

Un ultrafiltre $\mathcal{V}$ d'un anneau booléen quantifié B sera dit un ultrafiltre validant s'il possède la propriété suivante :

$(\exists ar \in \mathcal{V}) \implies (\text{il existe } b \in I \text{ tel que } (b/a)r \in \mathcal{V})$

Il en résultera d'ailleurs l'équivalence, l'implication contraire étant triviale, puisque $(b/a)r \leq \exists ar$, pour tout b .

Il en résultera également :

$(\forall ar \in \mathcal{V}) \iff (\text{pour tout } b \in I : (b/a)r \in \mathcal{V})$

B sera dit un anneau booléen quantifié validé s'il possède des ultrafiltres validants et si leur intersection se réduit à l'élément 1.

Remarquons qu'un anneau booléen quantifié trivialement est

validé, car tous ses ultrafiltres sont validants.

Proposition 13 : Pour qu'une partie $\mathcal{V}$ d'un anneau booléen quantifié B soit un ultrafiltre validant, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique g soit une normalisation de B .

Démonstration : nous savons déjà que pour que $\mathcal{V}$ soit un ultrafiltre, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique soit un homomorphisme de B dans $\mathbb{Z}/(2)$.

- si $\mathcal{V}$ est un ultrafiltre validant : si $g(\exists ar) = 1$, $\exists ar \in \mathcal{V}$, donc il existe b tel que $(b/a)r \in \mathcal{V}$, donc $g((b/a)r) = 1$ et $\text{Sup}.g((b/a)r) = 1$
- si g est une normalisation : si $\exists ar \in \mathcal{V}$, $g(\exists ar) = \text{Sup}.g((b/a)r) = 1$, donc il existe b tel que $g((b/a)r) = 1$, soit $(b/a)r \in \mathcal{V}$, donc $\mathcal{V}$ est validant.

N.B. Nous verrons au paragraphe 5 divers exemples concernant les ultrafiltres validants et les anneaux validés.

-4- Ensemble prébooléen quantifié

Soit E un ensemble prébooléen (éléments $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; ensembles déductifs V_k) individualisé sur I ($a, b, c, \dots$). On dira que E est un ensemble prébooléen semi-quantifié sur I , s'il est muni d'une loi de composition externe, partout définie, avec I comme domaine d'opérateurs :

$$(a, \alpha) \longrightarrow \exists a \alpha$$

qui satisfait à l'axiome suivant :

$$PQ1/ \quad (\exists a \alpha \in V_k) \iff (\text{il existe } b \in I \text{ tel que } (b/a)\alpha \in V_k) \text{ quels que soient } a, \alpha, k.$$

Lemme 1 : Si α et β sont analogues, il en est de même de $\exists a \alpha$ et $\exists a \beta$, quel que soit l'individu a .

En effet : si $\exists a \alpha \in V_k$, il existe b tel que $(b/a)\alpha \in V_k$, or $(b/a)\alpha$ est analogue à $(b/a)\beta$, donc il existe b tel que $(b/a)\beta \in V_k$, par suite $\exists a \beta \in V_k$; et réciproquement.

Lemme 2 : Quels que soient $\alpha \in E$ et $a \in I$: $\sup_{b \in I} (b/a)\varphi(\alpha)$ existe et est égale à $\varphi(\exists a \alpha)$.

Démonstration :

- Si $(b/a)\alpha \in V_k$, on a aussi $\exists a \alpha \in V_k$, par passage au quotient, il en résulte : $(b/a)\varphi(\alpha) \leq \varphi(\exists a \alpha)$, et ceci pour tout b .
- Si $\varphi(\beta) \geq (b/a)\varphi(\alpha)$ pour tout b : $(b/a)\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) = (b/a)\varphi(\alpha)$, autrement dit $(b/a)\alpha$ est analogue à $(b/a)\alpha \cdot \beta$; si on suppose alors $\exists a \alpha \in V_k$, il existe b tel que $(b/a)\alpha \in V_k$, donc $(b/a)\alpha \cdot \beta \in V_k$, donc $\beta \in V_k$, il en résulte : $\varphi(\exists a \alpha) \leq \varphi(\beta)$.

Il en résulte que E/R est un anneau booléen semi-quantifié sur I , et on a :

$$\exists a \varphi(\alpha) = \varphi(\exists a \alpha) \quad \text{où } \alpha \text{ désigne un représentant quelconque de } \varphi(\alpha).$$

De la même façon nous dirons que E est un ensemble prébooléen quantifié sur I , si, outre PQ1, il vérifie l'axiome :

$$PQ2/ \quad \text{Si } a, b, c \text{ sont 3 individus différents et si } \alpha \text{ dépend de } a, b, c : \\ ((c/b)\exists a \alpha \in V_k) \implies (\exists a (c/b)\alpha \in V_k) \text{ pour tout } k.$$

Par passage au quotient cet axiome devient exactement BQ2, et par suite E/R sera un anneau booléen quantifié sur I .

Etant donné un ensemble prébooléen $E(T, R)$ quantifié sur I , nous appellerons prénormalisation de E toute application n de E dans $Z/(2)$ possédant les deux propriétés :

PN1/ n est un préhomomorphisme (strict) de E dans $Z/(2)$ (muni de la structure prébooléenne normale).

PN2/ $n(\exists a \alpha) \leq \sup_{b \in I} n((b/a)\alpha)$ quels que soient a et α .

Proposition 1 : La fonction caractéristique σ_k d'un ensemble déductif V_k est une prénormalisation.

En effet :

1. si $\sigma_k(-\alpha) = 1$ $-\alpha \in V_k$ $\alpha \notin V_k$ $\sigma_k(\alpha) = 0$
 si $\sigma_k(-\alpha) = 0$ $-\alpha \notin V_k$ $\alpha \in V_k$ $\sigma_k(\alpha) = 1$
 donc $\sigma_k(-\alpha) = -\sigma_k(\alpha)$
2. si $\sigma_k(\alpha, \beta) = 1$ $\alpha, \beta \in V_k$ $\alpha \in V_k$ et $\beta \in V_k$ $\sigma_k(\alpha) = \sigma_k(\beta) = 1$
 si $\sigma_k(\alpha, \beta) = 0$ $\alpha, \beta \notin V_k$ $\alpha \notin V_k$ ou $\beta \notin V_k$ $\sigma_k(\alpha) = 0$ ou $\sigma_k(\beta) = 0$
 donc $\sigma_k(\alpha, \beta) = \sigma_k(\alpha) \cdot \sigma_k(\beta)$
3. si $\sigma_k(\exists a \alpha) = 1$ $\exists a \alpha \in V_k$ donc il existe b tel que $(b/a)\alpha \in V_k$,
 alors $\sigma_k((b/a)\alpha) = 1$ et $\sup \sigma_k((b/a)\alpha) = 1$.

Proposition 2 : Si n est une prénormalisation de E , alors l'application N définie par : $N(\varphi(\alpha)) = n(\alpha)$ est une normalisation de E/R .

En effet :

n est un préhomomorphisme, donc N est un homomorphisme.

$$N(\exists a \varphi(\alpha)) = N(\varphi(\exists a \alpha)) = n(\exists a \alpha) \leq \sup n((b/a)\alpha) = \sup N(\varphi((b/a)\alpha)) \\ = \sup N((b/a)\varphi(\alpha))$$

Proposition 3 : Si N est une normalisation de E/R , alors $n = N_0 \varphi$ est une prénormalisation de E .

Démonstration immédiate.

Proposition 4 : Chaque $\varphi(V_k)$ est un ultrafiltre validant de E/R .

Démonstration : la fonction caractéristique σ_k de V_k est une prénormalisation, donc l'application g_k définie par $g_k(\varphi(\alpha)) = \sigma_k(\alpha)$ est une normalisation de E/R , et on constate immédiatement que c'est la fonction caractéristique de $\varphi(V_k)$.

THEOREME 1 : E/R est un anneau booléen quantifié validé .

En effet : si $\varphi(\alpha)$ appartient à tous les ultrafiltres validants, il appartient à tous les $\varphi(V_k)$, donc α appartient à tous les ensembles déductifs V_k , donc $\alpha \in T$ et $\varphi(\alpha) = 1$.

Réciproquement, tout anneau booléen quantifié validé peut être considéré comme un ensemble prébooléen quantifié, en prenant comme famille déductive celle de tous ses ultrafiltres validants; la relation d'analogie est alors celle d'identité. Nous dirons qu'il s'agit là de sa structure normale.

Etant donnés deux ensembles prébooléens, $E(T,R)$ et $E'(T',R')$, quantifiés sur le même ensemble d'individus I , nous dirons qu'une application f de E dans E' est un préhomomorphisme quantifié si :

PHQ1/ f est un préhomomorphisme d'ensembles prébooléens.

PHQ2/ f est une application individualisante.

PHQ3/ $f(\exists a\alpha)$ est analogue à $\exists af(\alpha)$ modulo R' , quels que soient a et α .

En particulier un tel préhomomorphisme pourra être strict (on remplacera alors PHQ3 par : $f(\exists a\alpha) = \exists af(\alpha)$), c'est le cas de l'application canonique φ de E dans E/R , et d'une façon plus générale ce sera le cas chaque fois que E' sera un anneau booléen quantifié validé muni de la structure normale.

Les deux théorèmes suivants se démontrent sans aucune difficulté :

THEOREME 2 : Soient $E(T,R)$ et $E'(T',R')$ deux ensembles prébooléens quantifiés sur I , φ et φ' leurs application canoniques, f un préhomomorphisme quantifié de E dans E' , alors l'application $\bar{f}$ définie par : $\bar{f}(\varphi(\alpha)) = \varphi'(f(\alpha))$ est un homomorphisme quantifié de E/R dans E'/R' .

THEOREME 3 : Si $\bar{f}$ est un homomorphisme quantifié de E/R dans un anneau booléen quantifié validé B (avec le même ensemble d'individus I), alors $f = \bar{f}_0 \varphi$ est un préhomomorphisme quantifié (strict) de E dans B (muni de la structure normale).

-5- Application aux anneaux $\langle A \rangle$

Soit A (éléments $u, v, w, \dots$) un ensemble individualisé sur I ($a, b, c, \dots$) non trivialement. A partir de A nous construisons l'ensemble prébooléen $\tilde{A}$ (tableaux $\alpha, \beta, \gamma, \dots$), puis l'anneau booléen $\langle A \rangle$ (grilles $\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle, \langle \gamma \rangle, \dots$) tous deux individualisés sur I de la façon canonique qui a été décrite au paragraphe 2 de ce chapitre. Ce paragraphe a pour but de mettre en évidence les phénomènes suivants :

- Tout anneau de type $\langle A \rangle$ est semi-quantifié, et en général quantifié (en imposant une condition très simple à A).
- Les quantificateurs qui se trouvent ainsi définis sur $\langle A \rangle$ obéissent à des règles de calcul d'une très grande simplicité, excluant toute ressemblance avec le calcul des prédicats restreint du premier ordre.
- En contrepartie, le fait pour un ultrafiltre de $\langle A \rangle$ d'être validant se traduit par des conditions assez restrictives et compliquées, alors que dans le cas du calcul des prédicats la situation est beaucoup plus simple.
- L'universalité de $\langle A \rangle$ vis à vis des structures individualisées (cf. parag. 2 de ce chap.) n'est plus conservée lorsqu'il s'agit de structures quantifiées. Là encore la situation est exactement l'opposée de celle que nous rencontrerons dans l'étude du calcul des prédicats.

Tous ces résultats, négatifs par rapport au but poursuivi, mettent en lumière les différences essentielles qu'il y a entre la construction du calcul propositionnel et celle du calcul des prédicats, à partir de leurs ensembles d'atomes respectifs, et montrent ainsi l'impossibilité de définir pour le calcul des prédicats un anneau de t.r.a. analogue à celui que nous avons construit pour le calcul propositionnel.

1/ Semi-quantification de $\langle A \rangle$

Soit $\langle \alpha \rangle$ une grille non close, α désignera l'un de ses représentants n'ayant aucune colonne close; soit a un individu, nous poserons :

$qa\alpha$ = tableau déduit de α par suppression de tous les éléments de A dépendant de a , dans toutes leurs occurrences dans l'écriture de α .

Exemple :

$$\alpha = \left\langle \begin{array}{ccc} lv & lu & lv \\ Ow & Ow & Ow \end{array} \right\rangle$$

où u et v dépendent de a
et w est indépendant de a .

on aura :

$$qa\alpha = \left\langle \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ Ow & Ow & Ow \end{array} \right\rangle$$

Soit $f \in A$ et supposons que $q\alpha$ soit f -clos, cela signifie que chacune de ses colonnes est f -close; soit K l'une de ses colonnes, dont le bloc supérieur (resp. inférieur) est B (resp. B'), dire qu'elle est f -close signifie:

il y a au moins un élément $u \in B$ tel que $f(u) = 0$
ou il y a au moins un élément $u' \in B'$ tel que $f(u') = 1$

Or B (resp. B') est un sous-bloc du bloc supérieur (resp. inférieur) de la colonne correspondante de $(b/a)\alpha$, où b est un individu quelconque. Il en résulte que chaque $(b/a)\alpha$ est f -clos, et par passage au quotient :

$$\langle q\alpha \rangle \leq (b/a)\langle \alpha \rangle \quad \text{quel que soit } b \in I.$$

Supposons avoir trouvé une autre grille $\langle \beta \rangle$ telle que :

$$\langle \beta \rangle \leq (b/a)\langle \alpha \rangle \quad \text{pour tout } b \in I.$$

Soit $f \in A$ telle que β soit f -clos, ce qui implique que chaque $(b/a)\alpha$ soit f -clos. Considérons une colonne K déterminée de α :

$$K = \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \quad \text{avec } B = B_a \cup B_0 \quad \text{et} \quad B' = B'_a \cup B'_0$$

où :

B_a (resp. B'_a) ne contient que des éléments $u_1, \dots, u_n$ (resp. $u'_1, \dots, u'_n$) dépendant de a ,

B_0 (resp. B'_0) ne contient que des éléments $v_1, \dots, v_m$ (resp. $v'_1, \dots, v'_m$) indépendant de a .

Cette colonne K est supposée non close, donc en particulier chaque u_i de B_a est différent de chaque u'_j de B'_a , par suite :

$(b/a)u_i \neq (b/a)u'_j$ sauf peut-être pour les individus b appartenant à la base de u_i où de u'_j (car si u_i et u'_j sont indépendants de b , $(b/a)u_i = (b/a)u'_j$ implique : $(a/b)(b/a)u_i = (a/b)(b/a)u'_j$, soit $u_i = u'_j$).

Posons : $J = I_\alpha \cup I_\beta$, c'est une partie finie de I , donc $J \neq \emptyset$, choisissons un individu b^0 dans J , tous les u_i et tous les u'_j sont indépendants de b^0 (lemme 4, parag. 2, chap. III), donc chaque $(b^0/a)u_i$ est différent de chaque $(b^0/a)u'_j$. Soit f^0 l'application coïncidant avec f , sauf peut-être pour les $(b^0/a)u_i$ où l'on pose :

$$f^0((b^0/a)u_i) = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

et les $(b^0/a)u'_j$ où l'on pose :

$$f^0((b^0/a)u'_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n'$$

β étant indépendant de b^0 et les $(b^0/a)u_i$ et les $(b^0/a)u'_j$ dépendant effectivement de b^0 , il en résulte qu'aucun $(b^0/a)u_i$ et qu'aucun $(b^0/a)u'_j$ ne figure dans le tableau β ; donc la f -valeur de β est identique à sa f^0 -valeur, β est donc f^0 -clos, par suite $(b^0/a)\alpha$ sera aussi f^0 -clos, en particulier la colonne

de $(b^0/a)\alpha$ correspondant à K , sera

f^0 -close, ce qui d'après la définition de f^0 , implique :

il existe au moins un v_i de B_0 tel que $f^0(v_i) = 0$

ou il existe au moins un v'_j de B'_0 tel que $f^0(v'_j) = 1$

Or B_0 et B'_0 constituent précisément les blocs supérieur et inférieur de la colonne correspondante, qaK , de $qa\alpha$; cette colonne sera donc f° -close. Il suffit maintenant de remarquer que chacun des v_i et v_j est différent de chacun des $(b^\circ/a)u_i$ et $(b^\circ/a)u_j$ (car les premiers sont indépendants de b° , tandis que les seconds en dépendent effectivement), ce qui montre que la f -valeur de la colonne qaK est identique à sa f° -valeur ; cette colonne est donc f -close.

Ayant raisonné sur une colonne quelconque, on en déduit que la f -clôture de β implique toujours la f -clôture de $qa\alpha$, d'où :

$$\langle \beta \rangle \leq \langle qa\alpha \rangle$$

Complétons notre définition par : $qa\langle 1 \rangle = \langle 1 \rangle$, et nous avons le résultat suivant :

Pour toute grille $\langle \alpha \rangle$ et tout individu a , $\inf_{b \in I} (b/a)\langle \alpha \rangle$ existe et est égale à $\langle qa\alpha \rangle$, que nous noterons maintenant :

$$\forall a\langle \alpha \rangle$$

De ceci résulte évidemment l'existence de $\exists a\langle \alpha \rangle = \sup (b/a)\langle \alpha \rangle$ et un procédé de calcul de cette grille :

$$\exists a\langle \alpha \rangle = -\forall a(-\langle \alpha \rangle)$$

THEOREME 1 : Pour tout ensemble A individualisé sur I , $\langle A \rangle$ est un anneau booléen semi-quantifié sur I .

2/ Quantification de $\langle A \rangle$

Cherchons à quelle condition $\langle A \rangle$ pourra être quantifié, ce que nous pourrions traduire ici par :

$$\forall a(c/b)\langle \alpha \rangle = (c/b)\forall a\langle \alpha \rangle \quad \text{si } b \neq a \text{ et } c \neq a$$

puisque ce sont les quantificateurs universels qui s'introduisent le plus simplement.

La réponse est immédiate en considérant la construction précédente du tableau $qa\alpha$: il faut et il suffit que :

$$(u \text{ dépend de } a) \implies ((c/b)u \text{ dépend de } a, \text{ si } b \neq a \text{ et } c \neq a) \quad (1)$$

- Cette condition est suffisante, car alors la suppression des éléments dépendant de a dans $(c/b)\alpha$, peut se faire en supprimant d'abord dans α les éléments dépendant de a , et en prenant ensuite l'image par (c/b) .

- Cette condition est nécessaire, comme on le voit sur toute grille de la forme :

$$\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ \text{Ou} \end{array} \right\rangle$$

Nous poserons alors la définition suivante :

Un ensemble A individualisé sur I sera dit atomique, si on a la propriété (1) quels que soient $u \in A$, a, b, c , individus différents appartenant à la base de u .

THEOREME 2 : Pour que $\langle A \rangle$ soit un anneau booléen quantifié sur I, il faut et il suffit que A soit un ensemble individualisé atomique.

Remarques

1°) Même lorsque A est un ensemble individualisé atomique, $\langle A \rangle$ n'est jamais un anneau booléen individualisé atomique : considérons un élément u de A dépendant de a, et la grille :

$$\langle \alpha \rangle = \begin{pmatrix} 1u \\ 0(c/b)u \end{pmatrix}$$

$\langle \alpha \rangle$ dépend de a

$(c/b)\langle \alpha \rangle = \langle 1 \rangle$ est indépendant de a.

2°) Ce théorème prouve l'existence d'anneaux booléens semi-quantifiés, mais non quantifiés :

Exemple : $A = I^3$ muni de la 3-individualisation engendrée par l'individualisation naturelle de I, il n'est pas atomique, car :

$u = (a, b, c)$ dépend de a, b, c (trois individus différents)

$(c/b)u = (a, c, c)$ a une base vide.

$\langle I^3 \rangle$ sera donc semi-quantifié, mais non quantifié.

3/ Ultrafiltres validants de $\langle A \rangle$

Nous supposerons maintenant que A est un ensemble individualisé atomique. Faisons d'abord les remarques suivantes :

1°) (cf. théorème 4, parag.4, chap.I) tous les ultrafiltres de $\langle A \rangle$ sont tous les ensembles $\bigcap_f$ des grilles f-closes, lorsque f parcourt A.

2°) $\bigcap_f$ est un ultrafiltre validant peut s'exprimer par :

(pour tout b, $(b/a)\langle \alpha \rangle$ est f-close) $\implies$ ($\forall a \langle \alpha \rangle$ est f-close) (2)

3°) $\forall a$ étant un quantificateur universel, il possède la propriété :

$$\forall a (\langle \alpha \rangle . \langle \beta \rangle) = \forall a \langle \alpha \rangle . \forall a \langle \beta \rangle$$

il en résulte que si la condition (2) est vérifiée pour toute grille $\langle \alpha \rangle$ réduite à une colonne, elle le sera pour toute grille.

Finalement, pour savoir si $\bigcap_f$ est ou n'est pas validant, nous sommes conduits à considérer une grille réduite à une colonne :

$$\langle \alpha \rangle = \begin{pmatrix} 1B \\ 0B' \end{pmatrix}$$

dépendant effectivement de a, que l'on peut supposer non close (sinon le résultat est trivial), et à chercher dans quelles conditions la f-clôture de tous les $(b/a)\langle \alpha \rangle$ implique celle de $\forall a \langle \alpha \rangle$.

Avec les notations précédemment utilisées, nous pouvons écrire :

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \begin{array}{c} 1B_o \\ OB'_o \end{array} \right\rangle \vee \left\langle \begin{array}{c} 1B_a \\ OB'_a \end{array} \right\rangle = \langle \alpha_o \rangle \vee \langle \alpha_a \rangle \quad (b/a)\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_o \rangle \vee (b/a)\langle \alpha_a \rangle$$

$$\forall a \langle \alpha \rangle = \langle \alpha_o \rangle$$

On constate alors que s'il existe un individu b^o tel que $(b^o/a)\langle \alpha_a \rangle$ soit f-ouverte, et si tous les $(b/a)\langle \alpha \rangle$ sont f-closes, ceci implique que $\langle \alpha_o \rangle = \forall a \langle \alpha \rangle$ soit f-close. Cette condition est d'ailleurs nécessaire pour que $\bigcap_f$ soit validant, comme on le voit en prenant une grille du type :

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \begin{array}{c} 1u \\ 0 \end{array} \right\rangle \quad \text{où } u \text{ dépend de } a.$$

car alors $\forall a \langle \alpha \rangle = \langle 0 \rangle$ est f-ouverte pour tout f.

Posons alors les définitions suivantes :

- grille simple de $\langle A \rangle$: toute grille non close admettant un représentant s'écrivant au moyen d'une seule colonne, c'est à dire toute disjonction de grilles différentes de la forme $H(u)$ ou $\neg H(u)$.
- on dira qu'une grille simple dépend complètement de a, si tous les éléments de A apparaissant dans cette grille dépendent effectivement de a.
- une application $f \in \vec{A}$, sera dite validante, si quel que soit l'individu a, pour toute grille simple $\langle \alpha \rangle$ dépendant complètement de a, il existe au moins un individu b tel que $(b/a)\langle \alpha \rangle$ soit f-ouverte.

Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant :

THEOREME 3 : Pour que $\bigcap_f$ soit un ultrafiltre validant, il faut et il suffit que f soit une application validante.

Exemple :

$A = I$ individualisé naturellement. Les seules grilles simples dépendant complètement d'un individu a sont :

$$\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0a \end{array} \right\rangle \quad \text{et} \quad \left\langle \begin{array}{c} 1a \\ 0 \end{array} \right\rangle$$

En outre, l'ensemble des $(b/a)a$ où b parcourt I n'est autre que I lui-même. Il en résulte qu'une application $f \in \vec{A}$ sera validante si et seulement si elle n'est ni identiquement nulle ni identiquement égale à 1; autrement dit, tous les ultrafiltres, sauf deux, seront validants.

Il en résulte également que cet anneau $\langle I \rangle$ est validé : soit $\langle \alpha \rangle$ une grille f-close pour toute application f validante, soit f_0 (resp. f_1) l'application identiquement nulle (resp. égale à 1), soit b^o un individu n'appartenant pas à la base de $\langle \alpha \rangle$, c'est à dire n'apparaissant pas dans l'écriture d'un certain représentant α de $\langle \alpha \rangle$. Soit f'_0 (resp. f'_1) l'application coïncidant avec f_0 (resp. f_1), sauf en b^o où

l'on pose : $f'_0(b^0) = 1$ (resp. $f'_1(b^0) = 0$)
 f'_0 (resp. f'_1) est validante, et il suffit de remarquer que la
 f'_0 -valeur (resp. f'_1 -valeur) de $\langle \alpha \rangle$ est identique à sa f_0 -valeur (resp.
 f_1 -valeur); $\langle \alpha \rangle$ est donc f -close pour tout $f \in \tilde{A}$: $\langle \alpha \rangle = \langle 1 \rangle$.

Dans le cas général nous ne chercherons pas de condition nécessaire et suffisante pour que $\langle A \rangle$ soit validé.

4/ Problème d'universalité

Considérons les structures et applications suivantes :

E_S : ensembles individualisés (atomiques) sur I .

E_T : anneaux booléens quantifiés sur I .

(S,T) -applications : applications individualisantes.

T -applications : homomorphismes quantifiés.

Supposons que $\langle A \rangle$ et H , associés à A , soient solutions de ce problème universel, c'est à dire : pour tout anneau booléen quantifié B et toute application individualisante F de A dans B , il existe un homomorphisme quantifié G unique de $\langle A \rangle$ dans B , tel que : $F = G \circ H$. Nous pouvons montrer que ceci est faux, en prenant le contre-exemple suivant :

B : anneau booléen quantifié quelconque

F : application identiquement égale à 1

On aura donc : $G(H(u)) = 1$ quel que soit u ; considérons u dépendant

de a , $H(u) = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ \text{Ou} \end{matrix} \right\rangle$, $\forall a H(u) = \langle 0 \rangle$, donc $G(\forall a H(u)) = 0$

par ailleurs G devant être quantifié : $G(\forall a H(u)) = \forall a G(H(u)) = \forall a 1 = 1$, d'où une contradiction.

5°/ Linéarisation de certains anneaux $\langle A \rangle$

Il y a une catégorie intéressante d'anneaux $\langle A \rangle$: lorsqu'on prend $A = E \cup I$, où E est un ensemble quelconque (pouvant être vide) individualisé trivialement sur I (on pourra supposer que E et I sont disjoints), I étant individualisé naturellement, et A étant alors muni de l'individualisation somme.

On démontre sans aucune peine les résultats suivants :

- A est atomique, par suite $\langle A \rangle$ est quantifié.
- $f \in \tilde{A}$ est validante si et seulement si sa restriction à I n'est ni identiquement nulle, ni identiquement égale à 1.
- $\langle A \rangle$ est un anneau quantifié validé.

Considérons une grille $\langle \alpha \rangle$, de base non vide $\{a_1, \dots, a_n\}$, nous pouvons l'écrire à l'aide d'un représentant α ayant exactement la même base (prop.3, parag.2, chap.III); $\langle \alpha \rangle$ est le produit d'un certain nombre de grilles simples : $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_1 \rangle \dots \langle \alpha_s \rangle$

Considérons l'individu a_1 , pour chaque grille simple $\langle \alpha_i \rangle$:

- ou bien $\langle \alpha_i \rangle$ est dépendante de a_1 .

$$\begin{aligned}
 & - \text{ ou bien } \langle \alpha_i \rangle = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0a_1 \end{array} \right\rangle v\langle \beta_i \rangle \\
 & - \text{ ou bien } \langle \alpha_i \rangle = \left\langle \begin{array}{c} 1a_1 \\ 0 \end{array} \right\rangle v\langle \beta_i \rangle = \left[\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 0a_1 \end{array} \right\rangle + \langle 1 \rangle \right] v\langle \beta_i \rangle \left. \vphantom{\langle \alpha_i \rangle} \right\} \text{ où } \langle \beta_i \rangle \text{ est} \\
 & \hspace{15em} \text{indépendante} \\
 & \hspace{15em} \text{de } a_1.
 \end{aligned}$$

Il en résulte que $\langle \alpha \rangle$ pourra s'écrire :

$$\langle \alpha \rangle = \langle \alpha' \rangle + \langle \alpha'' \rangle . H(a_1)$$

où $\langle \alpha' \rangle$ et $\langle \alpha'' \rangle$ sont indépendantes de a_1 , c'est à dire dépendent au plus de $a_2, \dots, a_n$. On démontre facilement l'unicité de cette décomposition.

La même opération peut être faite pour $\langle \alpha' \rangle$ et $\langle \alpha'' \rangle$ avec l'individu a_2 , etc... On aboutit finalement au résultat suivant :

Toute grille $\langle \alpha \rangle$ de $\langle E \cup I \rangle$, de base $\{a_1, \dots, a_n\}$, peut s'écrire d'une façon et d'une seule :

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha \rangle = U(a_1, \dots, a_n) &= r_n . a_1 \dots a_n + \sum r_{i, n-1} . a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_n + \dots \\
 &+ \sum r_{i, 1} . a_i + r_0
 \end{aligned}$$

où les r désignent des éléments de l'anneau booléen $\langle E \rangle$, et où, pour simplifier l'écriture, on a identifié chaque individu a à $H(a)$. U est donc un polynôme à n variables, du premier degré par rapport à chacune de ces variables, à coefficients dans $\langle E \rangle$. Remarquons enfin que tout polynôme de ce type est la "représentation linéaire" d'une grille $\langle \alpha \rangle$.

D'une façon un peu plus générale, nous pouvons remplacer l'anneau $\langle E \rangle$ par un anneau booléen B absolument quelconque, et considérer l'anneau, que nous noterons $L(B:I)$, des polynômes à coefficients dans B , à plusieurs variables prises dans I (ces variables obéissant également à la règle de l'idempotence du produit).

Un tel anneau $L(B:I)$ est individualisable de façon très simple par : $(b/a)U =$ le polynôme déduit de U en remplaçant la variable a par la variable b .

Il est semi-quantifié et même quantifié :

soit $U = U' + a.U''$ où U' et U'' sont indépendants de a

soit V un autre polynôme indépendant de a , tel que $V \geq U$:

$$U.V = U = U'.V + a.U''.V$$

ce qui implique : $U'.V = U'$ et $U''.V = U''$, soit $U' \leq V$ et $U'' \leq V$ d'où $V \geq U'.V$

$U'.V$ est donc le plus petit élément de $i(a)(U)$. On a donc tout simplement :

$$\exists a U = U'.V$$

et pour les quantificateurs universels :

$$\begin{aligned}
 \forall a U &= -\exists a (-U) = -\exists a (U' + 1 + a.U'') \\
 &= -((U'+1).V.U'')
 \end{aligned}$$

$$\forall a U = U' . -U''$$

On démontre facilement que tout homomorphisme de $L(B:I)$ dans $Z/(2)$ est entièrement caractérisé par sa restriction à B (qui doit être un homomorphisme) et sa restriction à I (qui peut être une application quelconque), et qu'un tel homomorphisme sera une normalisation si et seulement si sa restriction à I n'est ni identiquement nulle ni identiquement égale à 1. Il résulte de là que $L(B:I)$ est toujours un anneau validé.

CHAPITRE IV : APPLICATIONS AU CALCUL DES PREDICATS

-1- Anneau booléen quantifié validé E/R

Rappelons les principales définitions et précisons nos notations pour le Calcul des Prédicats restreint du premier ordre sans égalité :

I : ensemble des individus $a, b, \dots$ (supposé infini)
 X : ensemble des variables $x, y, \dots$ (supposé infini)
 R^n : ensemble des prédicats de poids n : $r_1^n, r_2^n, \dots$
 $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$: ensemble des prédicats.

A : ensemble des atomes, de la forme : $\tau = r_{\lambda}^n a_1 \dots a_n$
 E : ensemble des énoncés $\alpha, \beta, \dots$ utilisant les symboles logiques :

$$- \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow \quad \exists \quad \forall$$

F^x : ensemble des formules quantifiables par une variable x , c'est à dire de la forme : $\Phi^x = (x/a)\alpha$ où α est un énoncé sans occurrence de x .

T : ensemble des énoncés démontrables (ou universellement valides).

Rappelons la définition des validations (il s'agira toujours ici de validations de base I) : toute partie V de E telle que :

- 1) $\alpha \in V \iff \neg \alpha \notin V$
- 2) $\alpha \wedge \beta \in V \iff \alpha \in V \text{ et } \beta \in V$
- 3) $\alpha \vee \beta \in V \iff \alpha \in V \text{ ou } \beta \in V$
- 4) $\alpha \rightarrow \beta \in V \iff \alpha \notin V \text{ ou } \beta \in V$
- 5) $\alpha \leftrightarrow \beta \in V \iff (\alpha \in V \text{ et } \beta \in V) \text{ ou } (\alpha \notin V \text{ et } \beta \notin V)$
- 6) $\exists x[\Phi^x] \in V \iff \text{il existe } a \text{ tel que } (a/x)\Phi^x \in V$
- 7) $\forall x[\Phi^x] \in V \iff \text{pour tout } a : (a/x)\Phi^x \in V$

Pour toute partie B de A il existe une validation et une seule, V, telle que : $V \cap A = B$.

Rappelons également :

- si $\alpha \in T$, alors quels que soient les individus a et b : $(a/b)\alpha \in T$
- pour que $\alpha \in T$ il faut et il suffit que α appartienne à toutes les validations, autrement dit T est l'intersection de toutes les validations.

Nous supposerons également connues toutes les propriétés des substitutions d'individus (au sens habituel) dans les énoncés, et remarquons qu'ici : α est indépendant de a , c'est à dire $(b/a)\alpha = \alpha$ pour tout b , équivaut à : l'individu a n'a pas d'occurrence dans l'énoncé α

(c'est à dire n'apparaît pas dans l'écriture explicite de α).

Ces substitutions définissent une structure d'individualisation sur E; nous remarquons d'ailleurs que E, et en particulier A, sont des ensembles atomiques.

Nous constatons ensuite que E est un ensemble prébooléen pour les opérations $\wedge$ et $-$, et pour la famille déductive constituée par toutes les validations, le puits de E est alors l'ensemble T des énoncés démontrables. En outre les substitutions d'individus sont des préhomomorphismes (stricts) de E. Enfin, nous pouvons définir une loi de composition externe avec I comme domaine d'opérateurs, de la façon suivante:

Dans chaque énoncé α il n'y a qu'un nombre fini d'occurrences de variables, faisons alors une fois pour toutes le choix pour chaque énoncé α d'une variable x_α n'apparaissant pas dans α ; la loi de composition sera alors : $(a, \alpha) \longrightarrow \exists x_\alpha [(x_\alpha/a)\alpha]$, que nous noterons simplement $\exists a\alpha$.

E est alors un ensemble prébooléen quantifié sur I; les axiomes se vérifient en effet facilement :

PQ1/ Soit une validation V : si $\exists a\alpha \in V$, soit $\exists x_\alpha [(x_\alpha/a)\alpha] \in V$, alors il existe un individu b tel que $(b/x_\alpha)(x_\alpha/a)\alpha \in V$, soit tout simplement $(b/a)\alpha \in V$; et réciproquement.

PQ2/ Si b et c sont différents de a :

$$\exists a(c/b)\alpha = \exists x_{\alpha'} [(x_{\alpha'}/a)(c/b)\alpha] \quad \text{en posant } \alpha' = (c/b)\alpha$$

or :

$$(x_{\alpha'}/a)(c/b)\alpha = (c/b)(x_{\alpha'}/a)\alpha$$

donc :

$$\exists a(c/b)\alpha = \exists x_{\alpha'} [(c/b)(x_{\alpha'}/a)\alpha] = (c/b)\exists x_{\alpha'} [(x_{\alpha'}/a)\alpha]$$

par ailleurs on sait que $\exists x_{\alpha'} [(x_{\alpha'}/a)\alpha] \longleftrightarrow \exists x_\alpha [(x_\alpha/x_{\alpha'})(x_{\alpha'}/a)\alpha]$ est un énoncé démontrable

et en remarquant que : $(x_\alpha/x_{\alpha'})(x_{\alpha'}/a)\alpha = (x_\alpha/a)\alpha$ il en résulte que

$\exists a(c/b)\alpha$ est analogue à :

$$(c/b)\exists x_\alpha [(x_\alpha/a)\alpha] = (c/b)\exists a\alpha.$$

Donc E est bien un ensemble prébooléen quantifié sur I, nous désignerons, comme d'habitude, par E/R l'anneau booléen quotient (anneau booléen quantifié validé), et par φ l'application canonique de E dans E/R.

Remarque :

La structure d'ensemble prébooléen quantifié de E dépend du choix pour chaque énoncé, de la variable x_α , mais quel que soit ce choix on obtient toujours le même anneau booléen quotient E/R; en effet, considérons un autre choix, soit x'_α pour l'énoncé α , et posons :

$$\exists' a\alpha = \exists x'_\alpha [(x'_\alpha/a)\alpha]$$

cet énoncé est analogue à : $\exists x_\alpha [(x_\alpha/a)\alpha]$

(la vérification est tout à fait semblable à celle de l'axiome PQ2), il en résulte bien :

$$\varphi(\exists! a \alpha) = \varphi(\exists a \alpha)$$

Nous avons vu que chaque $\varphi(V)$, où V est une validation, est un ultrafiltre validant de E/R , ici nous avons également la réciproque :

Proposition 1 : Si $\mathcal{V}$ est un ultrafiltre validant de E/R , alors $\varphi^{-1}(\mathcal{V})$ est une validation de E .

En effet, posons $V = \varphi^{-1}(\mathcal{V})$

1) si $\alpha \in V$: $\varphi(\alpha) \in \mathcal{V}$, donc $\neg\varphi(\alpha) = \varphi(\neg\alpha) \notin \mathcal{V}$, donc $\neg\alpha \notin V$. Réciproquement : si $\neg\alpha \notin V$, $\varphi(\neg\alpha) = \neg\varphi(\alpha) \notin \mathcal{V}$, donc $\varphi(\alpha) \in \mathcal{V}$, soit $\alpha \in V$.

2) 3) 4) 5) vérifications analogues en utilisant les propriétés de n'importe quel ultrafiltre de n'importe quel anneau booléen.

6) si $\exists x[\varphi^x] \in V$: φ^x est de la forme $(x/a)\alpha$, où α est un énoncé, l'énoncé $\exists x[(x/a)\alpha]$ est analogue à $\exists x_\alpha[(x_\alpha/a)\alpha] = \exists a\alpha$, donc $\varphi(\exists a\alpha) = \exists a\varphi(\alpha) \in \mathcal{V}$, donc il existe un individu b tel que $(b/a)\varphi(\alpha) = \varphi((b/a)\alpha) \in \mathcal{V}$, et par suite : $(b/a)\alpha = (b/x)(x/a)\alpha = (b/x)\varphi^x \in V$;

et réciproquement.

7) vérification analogue.

Proposition 2 : Pour qu'une partie V de E soit une validation, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique n soit une prénormalisation de E .

En effet, il suffit de démontrer la réciproque de la prop.1, parag.4, chap.III. Supposons donc que n soit une prénormalisation, l'application N définie par $N(\varphi(\alpha)) = n(\alpha)$ est alors une normalisation de E/R , donc la fonction caractéristique d'un ultrafiltre validant $\mathcal{V}$ de E/R , $V = \varphi^{-1}(\mathcal{V})$ est une validation de E , et :

$$\alpha \in V \iff \varphi(\alpha) \in \mathcal{V} \iff N(\varphi(\alpha)) = 1 \iff n(\alpha) = 1$$

donc n est la fonction caractéristique de V .

-2- Universalité de E/R

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer que l'anneau booléen quantifié validé E/R précédemment défini et la restriction φ' de φ (application canonique de E dans E/R) à l'ensemble A des atomes du calcul des prédicats, associés à A, sont solution du problème universel relatif aux structures et applications suivantes :

E_S : ensembles individualisés sur I

E_T : anneaux booléens quantifiés validés sur I

(S,T)-applications : applications individualisantes

T-applications : homomorphismes quantifiés.

Lemme 1 : Soit f une application individualisante de A dans un anneau booléen B quantifié sur I, il existe un prolongement et un seul f° de f à E, vérifiant quels que soient les énoncés α et β , les individus a et b, et la variable x, les 8 conditions :

- 1°) $f^\circ(-\alpha) = -f^\circ(\alpha)$
- 2°) $f^\circ(\alpha \wedge \beta) = f^\circ(\alpha) \cdot f^\circ(\beta)$
- 3°) $f^\circ(\alpha \vee \beta) = f^\circ(\alpha) \vee f^\circ(\beta)$
- 4°) $f^\circ(\alpha \rightarrow \beta) = f^\circ(\alpha) \rightarrow f^\circ(\beta)$
- 5°) $f^\circ(\alpha \leftrightarrow \beta) = f^\circ(\alpha) \leftrightarrow f^\circ(\beta)$
- 6°) $f^\circ(\exists x[(x/a)\alpha]) = \exists a f^\circ(\alpha)$
- 7°) $f^\circ(\forall x[(x/a)\alpha]) = \forall a f^\circ(\alpha)$
- 8°) $f^\circ((b/a)\alpha) = (b/a)f^\circ(\alpha)$

Démonstration :

Soit E_n l'ensemble des énoncés comportant au plus n symboles logiques, et soit $\Pi(n)$ l'assertion : "il existe une application et une seule f_n de E_n dans B, prolongeant f, et qui sur E_n vérifie les 8 conditions précédentes".

a) $\Pi(0)$ est vraie, avec $f_0 = f$.

b) supposons $\Pi(n)$ vraie, et définissons l'application f_{n+1} de E_{n+1} dans B par :

$$\begin{array}{ll}
 f_{n+1}(\alpha) = f_n(\alpha) & \text{si } \alpha \in E_n \\
 = -f_n(\beta) & \text{si } \alpha = -\beta \\
 = f_n(\beta) \cdot f_n(\gamma) & \text{si } \alpha = \beta \wedge \gamma \\
 = f_n(\beta) \vee f_n(\gamma) & \text{si } \alpha = \beta \vee \gamma \\
 = f_n(\beta) \rightarrow f_n(\gamma) & \text{si } \alpha = \beta \rightarrow \gamma \\
 = f_n(\beta) \leftrightarrow f_n(\gamma) & \text{si } \alpha = \beta \leftrightarrow \gamma \\
 = \exists a f_n(\beta) & \text{si } \alpha = \exists x[(x/a)\beta] \\
 = \forall a f_n(\beta) & \text{si } \alpha = \forall x[(x/a)\beta]
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} f_{n+1}(\alpha) = f_n(\alpha) \\ \vdots \\ f_{n+1}(\beta) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \alpha \text{ ayant} \\ \text{exactement} \\ n+1 \text{ symboles} \\ \text{logiques} \end{array}$$

f_{n+1} est ainsi bien définie sur E_{n+1} , elle prolonge f_n , donc f, et vérifie sur E_{n+1} les 8 conditions requises, en effet :

1°) $f_{n+1}(-\alpha) = f_n(-\alpha) = -f_n(\alpha) = -f_{n+1}(\alpha)$ si α a au plus $n-1$ symboles logiques .

$= -f_n(\alpha) = -f_{n+1}(\alpha)$ par définition, si α a n symboles logiques .

2°) ... 5°) vérifications analogues.

6°) si α a au plus $n-1$ symboles logiques :

$$f_{n+1}(\exists x[(x/a)\alpha]) = f_n(\exists x[(x/a)\alpha]) = \exists a f_n(\alpha) = \exists a f_{n+1}(\alpha)$$

si α a n symboles logiques :

$$f_{n+1}(\exists x[(x/a)\alpha]) = \exists a f_n(\alpha) = \exists a f_{n+1}(\alpha) \quad \text{par définition.}$$

7°) vérification analogue.

8°) là encore, seul le cas où α a exactement $n+1$ symboles logiques prête à vérification, et pour cela nous envisagerons les 7 formes possibles de l'énoncé α :

a) $\alpha = -\beta$, $f_{n+1}(\alpha) = -f_n(\beta)$ et $f_n((b/a)\beta) = (b/a)f_n(\beta)$ par hypothèse de récurrence, donc :

$$f_{n+1}((b/a)\alpha) = f_{n+1}((b/a)-\beta) = f_{n+1}(-(b/a)\beta) = -f_n((b/a)\beta)$$

$$= -(b/a)f_n(\beta) = (b/a)(-f_n(\beta)) = (b/a)f_{n+1}(\alpha)$$

b), ..., e) c'est à dire pour : $\alpha = \beta \wedge \gamma$, $\alpha = \beta \vee \gamma$, $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$, $\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma$ les vérifications sont analogues.

f) $\alpha = \exists x[(x/a')\beta]$, alors $f_{n+1}(\alpha) = \exists a' f_n(\beta)$

Eliminons d'abord le cas où $a' = a$:

$$(b/a)\alpha = \alpha \quad \text{car } \alpha \text{ est indépendant de } a', \quad f_{n+1}((b/a)\alpha) = f_{n+1}(\alpha) = (b/a)f_{n+1}(\alpha)$$

car $\exists a' f_n(\beta)$ est aussi indépendant de a' .

Supposons donc $a' \neq a$: soit a'' un individu tel que β (et par suite $f_n(\beta)$) soit indépendant de a'' , et $a'' \neq a$, et $a'' \neq b$.

On vérifie immédiatement :

$$\begin{aligned} (x/a')\beta &= (x/a'')(a''/a')\beta \\ (b/a)\alpha &= (b/a)\exists x[(x/a')\beta] = \exists x[(b/a)(x/a')\beta] = \exists x[(b/a)(x/a'')(a''/a')\beta] \\ (b/a)(x/a'')(a''/a')\beta &= (x/a'')(b/a)(a''/a')\beta \\ \text{donc } (b/a)\alpha &= \exists x[(x/a'')(b/a)(a''/a')\beta] \end{aligned}$$

il en résulte :

$$\begin{aligned} f_{n+1}((b/a)\alpha) &= \exists a'' f_n((b/a)(a''/a')\beta) && \text{par définition} \\ &= \exists a'' (b/a)(a''/a') f_n(\beta) && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= (b/a)\exists a'' (a''/a') f_n(\beta) && \text{car } B \text{ est quantifié} \\ &= (b/a)\exists a' f_n(\beta) && \text{prop.2, parag.3, chap III} \\ &= (b/a)f_{n+1}(\alpha) \end{aligned}$$

g) $\alpha = \forall x[(x/a')\beta]$: démonstration analogue.

En outre, f_{n+1} est la seule telle application, en effet, si g en est une autre, la restriction de g à E_n doit coïncider avec f_n (par hypothèse de récurrence), donc si $\alpha \in E_n$:

$$f_{n+1}(\alpha) = f_n(\alpha) = g(\alpha)$$

et si $\alpha \in E_{n+1}$:

- par exemple, si $\alpha = \beta \vee \gamma$: $f_{n+1}(\alpha) = f_n(\beta) \vee f_n(\gamma) = g(\beta) \vee g(\gamma) = g(\beta \vee \gamma) = g(\alpha)$
- par exemple, si $\alpha = \forall x[(x/a)\beta]$: $f_{n+1}(\alpha) = \forall a f_n(\beta) = \forall a g(\beta) = g(\forall x[(x/a)\beta]) = g(\alpha)$

etc...

Donc $g = f_{n+1}$

L'assertion $\Pi(n)$ est donc vraie pour tout n . Pour tout énoncé α , posons alors :

$$f^\circ(\alpha) = f_n(\alpha) \quad \text{où } n \text{ est le nombre de symboles logiques de } \alpha.$$

f° applique bien E dans B , prolonge f , vérifie les 8 conditions requises et c'est la seule telle application.

Lemme 2 : Le procédé décrit par le lemme 1 permet d'obtenir tous les préhomomorphismes quantifiés (stricts) de E dans un anneau booléen quantifié validé B (muni de la structure normale).

Démonstration :

1°/ Soit f° une application construite ainsi que l'indique le lemme 1, f° conserve évidemment la multiplication, la négation et les substitutions, en outre :

$$f^\circ(\exists a \alpha) = f^\circ(\exists x_\alpha[(x_\alpha/a)\alpha]) = \exists a f^\circ(\alpha)$$

Il reste à montrer que si α est un énoncé démontrable, on a alors $f^\circ(\alpha) = 1$; ceci se vérifie par récurrence :

- si α a la forme d'un axiome du calcul propositionnel : immédiat.
- si α est l'axiome : $(a/x)\Phi^X \rightarrow \exists x[\Phi^X]$
soit $\Phi^X = (x/b)\beta$, $\alpha = (a/x)(x/b)\beta \rightarrow \exists x[(x/b)\beta]$
 $\quad \quad \quad = (a/b)\beta \rightarrow \exists x[(x/b)\beta]$
- $f^\circ(\alpha) = f^\circ((a/b)\beta \rightarrow \exists x[(x/b)\beta])$
 $\quad = (a/b)f^\circ(\beta) \rightarrow \exists b f^\circ(\beta) = 1$ puisque $\exists b f^\circ(\beta) = \text{Sup.}(c/b)f^\circ(\beta)$
- démonstration analogue si α est l'axiome : $\forall x[\Phi^X] \rightarrow (a/x)\Phi^X$
- si α est démontrable par la règle de modus ponens : il existe $\beta \in T$ tel que $\beta \rightarrow \alpha \in T$, et si l'on suppose $f^\circ(\beta) = f^\circ(\beta \rightarrow \alpha) = 1$, on a alors $f^\circ(\alpha) = 1$ (même vérification que pour le calcul propositionnel).
- si $\alpha = \exists x[\Phi^X] \rightarrow \beta$, l'énoncé $(a/x)\Phi^X \rightarrow \beta$ étant démontrable avec Φ^X et β indépendants de a , et si l'on suppose que $f^\circ((a/x)\Phi^X \rightarrow \beta) = 1$
soit $\Phi^X = (x/b)\gamma$, alors $(a/x)\Phi^X \rightarrow \beta = (a/x)(x/b)\gamma \rightarrow \beta$
 $\quad \quad \quad = (a/b)\gamma \rightarrow \beta$

par hypothèse : $f^\circ((a/b)\gamma \rightarrow \beta) = 1$, ou encore : $(a/b)f^\circ(\gamma) \leq f^\circ(\beta)$

en outre : $f^\circ(\alpha) = f^\circ(\exists x[(x/b)\gamma]) \rightarrow f^\circ(\beta) = \exists b f^\circ(\gamma) \rightarrow f^\circ(\beta)$

β est indépendant de a , donc aussi $f^\circ(\beta)$

Φ^X est indépendant de a , donc si $b \neq a$, γ et par suite $f^\circ(\gamma)$ seront

indépendants de a , et dans ce cas il suffit d'appliquer la prop.3, parag.3, chap.III :

$$\exists b f^\circ(\alpha) \leq f^\circ(\beta) \quad \text{donc} \quad f^\circ(\alpha) = 1$$

Dans le cas où $b = a$: $f^\circ(\alpha) \leq f^\circ(\beta)$, $f^\circ(\beta)$ est indépendant de a , c'est à dire ici b , donc $\exists b f^\circ(\alpha) \leq f^\circ(\beta)$, donc $f^\circ(\alpha) = 1$

- Démonstration analogue si $\alpha = \beta \rightarrow \forall x [\Phi^x]$, lorsque $\beta \rightarrow (a/x)\Phi^x$ est démontrable avec Φ^x et β indépendants de a .

f° est donc bien un préhomomorphisme quantifié.

2°/ Si g est un préhomomorphisme quantifié de E dans B , il vérifie les 8 conditions du lemme 1, car d'après le théorème 2, parag.4, chap.III, l'application $\overline{g}$ définie par : $\overline{g}(\varphi(\alpha)) = g(\alpha)$ est un homomorphisme quantifié de E/R dans B , on a donc, par exemple :

$$g(\alpha \vee \beta) = \overline{g}(\varphi(\alpha \vee \beta)) = \overline{g}(\varphi(\alpha) \vee \varphi(\beta)) = g(\alpha) \vee g(\beta)$$

$$g(\forall x [(x/a)\alpha]) = \overline{g}(\varphi(\forall [(x/a)\alpha])) = \overline{g}(\varphi(\forall \alpha)) = \forall a \overline{g}(\varphi(\alpha)) = \forall a g(\alpha)$$

etc...

THEOREME 1 : L'anneau booléen quantifié validé E/R et l'application φ' , restriction de φ à A , associés à A , sont universels pour le problème envisagé.

Démonstration :

Soit f une application individualisante de A dans un anneau booléen quantifié validé B . A partir de f nous construisons le préhomomorphisme quantifié f° (lemmes 1 et 2) de E dans B , puis l'extension $\overline{F}^\circ$ de f° définie par : $\overline{F}^\circ(\varphi(\alpha)) = f^\circ(\alpha)$, qui est un homomorphisme quantifié de E/R dans B .

Soit un atome τ : $\overline{F}^\circ(\varphi'(\tau)) = \overline{F}^\circ(\varphi(\tau)) = f^\circ(\tau) = f(\tau)$
donc $f = \overline{F}^\circ \circ \varphi'$

En outre, cette décomposition est unique : en effet, soit F un autre homomorphisme quantifié de E/R dans B , tel que $f = F \circ \varphi'$; $\overline{F}^\circ \circ \varphi$ et $F \circ \varphi$ sont deux préhomomorphismes quantifiés de E dans B , ils coïncident sur A :

$\overline{F}^\circ(\varphi(\tau)) = f^\circ(\tau) = f(\tau) = F(\varphi'(\tau)) = F(\varphi(\tau))$
donc ils sont identiques, et par suite $\overline{F}^\circ$ et F sont identiques.

Remarques

1°/ Tout préhomomorphisme quantifié de E dans B est donc entièrement défini par sa restriction sur A , celle-ci étant une application individualisante arbitraire.

2°/ D'après ce qui précède, pour qu'un énoncé α ne soit pas démontrable, il suffit que l'on puisse trouver un anneau booléen quantifié validé B et une application individualisante f de A dans B , tels que $f^\circ(\alpha) \neq 1$, f° étant le préhomomorphisme quantifié unique prolongeant f .

Exemple :

$$\alpha = \forall y [(y/b)\exists x [(x/a)r_{0ab}^2]] \rightarrow \exists x [(x/a)\forall y [(y/b)r_{0ab}^2]]$$

r_0^2 étant un prédicat de poids 2 quelconque.

Considérons l'anneau booléen quantifié validé $L_0 = L(Z/(2); I)$, et soit f l'application de A dans L_0 définie par :

$f(\tau) = 0$ si l'atome τ est dominé par un prédicat autre que r_0^2

$f(r_0^2 cd) = c + d$ (c'est à dire : $1.c + 1.d$) quels que soient c et d .

f est bien une application individualisante de A dans L_0 , donc se prolonge en un préhomomorphisme quantifié f° unique; on a :

$$f^\circ(\exists x[(x/a)r_0^2 ab]) = \exists a f^\circ(r_0^2 ab) = \exists a(a + b) = 1 \vee b = 1$$

$$f^\circ(\forall y[(y/b)r_0^2 ab]) = \forall b f^\circ(r_0^2 ab) = \forall b(a + b) = a.0 = 0$$

$$f^\circ(\forall y[(y/b)\exists x[(x/a)r_0^2 ab]]) = \forall b(1) = 1$$

$$f^\circ(\exists x[(x/a)\forall y[(y/b)r_0^2 ab]]) = \exists a(0) = 0$$

$$f^\circ(\alpha) = 1 \rightarrow 0 = 0$$

Donc α n'est pas démontrable.

3°/ Si nous prenons pour B un anneau quantifié trivialement, un préhomomorphisme quantifié f° de E dans B est caractérisé par sa restriction f à A , elle-même entièrement définie par la donnée d'une application Θ , qui peut être absolument arbitraire, de R (ensemble des prédicats) dans B ; en effet, étant donnés deux atomes dominés par le même prédicat :

$$\tau = r_\lambda^n a_1 \dots a_n \quad \text{et} \quad \tau' = r_\lambda^n b_1 \dots b_n$$

ces deux atomes peuvent toujours se déduire d'un même troisième :

$\tau'' = r_\lambda^n c_1 \dots c_n$ par un certain nombre de substitutions d'individus, on aura donc :

$$f(\tau) = f(\tau'') = f(\tau') = \Theta(r^n)$$

Il résulte de ceci qu'il est faux que pour tout anneau booléen quantifié validé B fixé, on ait la propriété :

$$(f^\circ(\omega) = 1 \text{ pour tout préhomomorphisme quantifié}) \iff (\alpha \in T)$$

car lorsque B est trivial, on a : $f^\circ(\tau \rightarrow \tau') = 1$, pour tout f° , sous la seule condition que τ et τ' soient dominés par le même prédicat.

Par contre il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

" $f^\circ(\alpha) = 1$ pour tout préhomomorphisme quantifié de E dans tout anneau booléen quantifié validé B "

et " $\alpha \in T$ "

puisque la première de ces deux propositions concerne en particulier l'application canonique φ de E dans E/R , et implique donc $\varphi(\alpha) = 1$, soit $\alpha \in T$.

-3- Tableaux de réduction inachevés

S'il n'est pas possible de définir pour le calcul des prédicats un anneau de t.r.a. analogue à celui du calcul propositionnel, on peut par contre définir les t.r.i. d'une manière tout à fait semblable, en remplaçant simplement la notion de préhomomorphisme par celle de prénormalisation.

Lemme 1 : Soit n une application quelconque de A dans $Z/(2)$, il existe une prénormalisation unique n° de E prolongeant n .

Démonstration :

Soit $A' = n^{-1}(1)$, il existe une validation V et une seule telle que $V \cap A = A'$, soit n° la fonction caractéristique de V , c'est une prénormalisation de E (prop.2, parag.1, chap.IV), qui prolonge bien n .

Montrons que n° est la seule prénormalisation répondant à la question: en effet, supposons qu'il y en ait une autre, soit $n^{\circ'}$: $n^{\circ'}$ sera la fonction caractéristique d'une autre validation V' , dont la trace sur A devra être la même que celle de V ; il en résulte que V et V' , et par suite n° et $n^{\circ'}$, sont identiques.

Remarque : on aurait pu également démontrer ce lemme, comme pour les préhomomorphismes (quantifiés), en montrant qu'il existe un prolongement unique n° de n vérifiant, pour tous énoncés, les propriétés :

- | | |
|---|---|
| 1. $n^\circ(\neg\alpha) = \neg n^\circ(\alpha)$ | |
| 2. $n^\circ(\alpha \wedge \beta) = n^\circ(\alpha) \cdot n^\circ(\beta)$ | 5. $n^\circ(\alpha \leftrightarrow \beta) = n^\circ(\alpha) \leftrightarrow n^\circ(\beta)$ |
| 3. $n^\circ(\alpha \vee \beta) = n^\circ(\alpha) \vee n^\circ(\beta)$ | 6. $n^\circ(\exists x[\Phi^x]) = \text{Sup}.n^\circ((a/x)\Phi^x)$ |
| 4. $n^\circ(\alpha \rightarrow \beta) = n^\circ(\alpha) \rightarrow n^\circ(\beta)$ | 7. $n^\circ(\forall x[\Phi^x]) = \text{Inf}.n^\circ((a/x)\Phi^x)$ |

et en montrant ensuite que ce procédé permet de construire toutes les prénormalisations de E .

Notations :

- une application quelconque de A dans U (ou $Z/(2)$) sera notée n
- la prénormalisation unique prolongeant n , sera notée n°
- la validation unique de fonction caractéristique n° sera notée V_n
- l'ensemble de toutes les prénormalisations de E sera noté $\overrightarrow{\mathcal{A}}$; il est donc en correspondance biunivoque avec $\overrightarrow{A}$, et avec l'ensemble des validations.

Lemme 2 : Pour qu'un énoncé α soit démontrable il faut et il suffit que $n^\circ(\alpha) = 1$ pour toute prénormalisation n° de E .

Ceci résulte immédiatement du fait que T est l'intersection de toutes les validations.

Il est alors possible de définir les t.r.i. exactement comme dans le cas du calcul propositionnel (parag.3, chap.II) :

A partir de l'ensemble E des énoncés du calcul des prédicats, nous construisons l'anneau booléen $\langle E \rangle$; désignons toujours par K_f l'ensemble des grilles f-closes, où $f \in \vec{E}$; $\vec{\omega}$ est un sous-ensemble de $\vec{E}$, $(K_{n^\circ})_{n^\circ \in \vec{\omega}}$ est une sous-famille de $(K_f)_{f \in \vec{E}}$: il en résulte que $\langle E \rangle$ peut être considéré comme un ensemble prébooléen, avec sa multiplication et sa négation d'anneau et avec la famille déductive $(K_{n^\circ})_{n^\circ \in \vec{\omega}}$; il sera alors noté $\mathcal{P}(E)$. Cet ensemble prébooléen $\mathcal{P}(E)$ engendre un anneau booléen que nous noterons $\{E\}$. On constate immédiatement que les 10 opérations de réduction établies pour le calcul propositionnel sont également valables pour cet anneau $\{E\}$, puisque les prénormalisations sont des préhomomorphismes particuliers. Nous noterons encore $\mathcal{P}$ l'application de E dans $\{E\}$:

$$\mathcal{P}(\alpha) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\alpha \end{array} \right\}$$

et $\mathcal{P}(\alpha)$ sera appelé le tableau de réduction inachevé (t.r.i.) de l'énoncé α .

Lemme 3 : Pour qu'un énoncé α soit démontrable il faut et il suffit que $\mathcal{P}(\alpha) = \{1\}$

En effet : si $\alpha \in T$, pour toute prénormalisation n° on a $n^\circ(\alpha) = 1$, donc $\mathcal{P}(\alpha)$ est n° -close pour tout n° , donc $\mathcal{P}(\alpha) = \{1\}$; et réciproquement.

Lemme 4 : $\mathcal{P}$ est un préhomomorphisme de E dans $\{E\}$

En effet :

- on vient de voir que : $\mathcal{P}(T) = \{1\}$

- on a : $\mathcal{P}(-\alpha) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0-\alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1\alpha \\ 0 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\alpha \end{array} \right\} = -\mathcal{P}(\alpha)$

- et : $\mathcal{P}(\alpha \wedge \beta) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\alpha \wedge \beta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0\alpha & 0\beta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\alpha \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\beta \end{array} \right\} = \mathcal{P}(\alpha) \cdot \mathcal{P}(\beta)$

Du théorème 2, parag.1, chap.I, on déduit alors : l'application $\mathcal{P}^*$ de E/R dans $\{E\}$, définie par :

$$\mathcal{P}^*(\varphi(\alpha)) = \mathcal{P}(\alpha)$$

est un homomorphisme d'anneaux.

THEOREME 1 : $\mathcal{P}^*$ est un isomorphisme d'anneaux de E/R sur $\{E\}$

Démonstration :

$\mathcal{P}^*$ est biunivoque : si $\mathcal{P}^*(\varphi(\alpha)) = \mathcal{P}^*(\varphi(\beta))$

$$\mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{P}(\beta)$$

$$\mathcal{P}(\alpha) \leftrightarrow \mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \in T$$

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$$

$\mathcal{Q}^*$ est surjective : ceci est toujours dû à la possibilité de décomposer toute grille de $\{E\}$ en grilles élémentaires du type : $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0\alpha \end{Bmatrix}$

(et même, pour toute grille, de trouver une grille élémentaire équivalente).

Il résulte bien entendu de ce théorème que $\{E\}$ pourra être considéré comme un anneau booléen quantifié sur I , en définissant les substitutions d'individus par :

$$(b/a)\{\alpha\} = \mathcal{Q}^*((b/a) \mathcal{Q}^{*-1}(\{\alpha\}))$$

et on a alors :

$$\exists a\{\alpha\} = \mathcal{Q}^*(\exists a \mathcal{Q}^{*-1}(\{\alpha\}))$$

de telle sorte que $\mathcal{Q}^*$ est un homomorphisme quantifié.

Il est par ailleurs possible de définir ces substitutions et ces quantificateurs de façon un peu différente :

Soit $\{\alpha\} = \mathcal{Q}^*(\varphi(\alpha)) = \mathcal{Q}(\alpha)$, où $\alpha \in E$, une grille de $\{E\}$:

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0\alpha \end{Bmatrix} ; \text{ soient deux individus quelconques } a \text{ et } b, \text{ posons provisoirement : } \{\beta\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0(b/a)\alpha \end{Bmatrix} = \mathcal{Q}((b/a)\alpha) = \mathcal{Q}^*(\varphi((b/a)\alpha))$$

$$(b/a)\varphi(\alpha) = \varphi((b/a)\alpha) \quad \text{donc} : \{\beta\} = \mathcal{Q}^*((b/a)\varphi(\alpha)) = (b/a)\{\alpha\}$$

En outre les substitutions étant des endomorphismes, il en résulte que chaque substitution d'individu (b/a) sur $\{E\}$, s'effectue tout simplement en remplaçant dans une écriture quelconque (et non plus seulement la forme "première" considérée) d'une grille donnée, tous les énoncés par leurs images par (b/a) .

De même, en ce qui concerne les quantificateurs : soient la

$$\text{grille } \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0\alpha \end{Bmatrix} \text{ et un individu } a, \text{ soit } \{\beta\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0\exists a\alpha \end{Bmatrix} = \begin{aligned} &\mathcal{Q}(\exists a\alpha) \\ &= \mathcal{Q}^*(\varphi(\exists a\alpha)) \\ &= \mathcal{Q}^*(\exists a\varphi(\alpha)) \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \exists a \begin{Bmatrix} 1 \\ 0\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0\exists a\alpha \end{Bmatrix} ; \text{ mais bien entendu, ce résultat n'est ici valable que pour la forme "première" de la grille.}$$

Ainsi, nous avons constaté que la construction de l'anneau des t.r.i. est la même que pour le calcul propositionnel, mais il y a cependant la différence essentielle suivante : les 10 opérations de réduction ne suffisent pas, en général, pour éliminer tout symbole logique dans l'écriture d'une grille de $\{E\}$, c'est à dire ne permettent pas de passer de $\{E\}$ à $\langle A \rangle$.

Toutefois, si l'on est moins exigeant que pour le calcul propositionnel, et si l'on désire simplement résoudre le problème suivant:

" Etant donné un énoncé α , est-ce-que $\alpha \in T$ ou $\alpha \notin T$? "

sans chercher à faire l'analyse des valeurs de vérité, nous allons voir

qu'il est possible de définir d'autres opérations à l'intérieur des grilles, traduisant exactement les règles de constitution des tableaux sémantiques.

Opérations de décision

Considérons une occurrence de $\forall x[\Phi^x]$ dans un bloc inférieur d'une grille $\{\alpha\}$:

$$\{\alpha\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ \hline ?\forall x[\Phi^x]? \end{array} \right| \right\}$$

on peut décomposer cette grille sous la forme :

$$\{\alpha\} = \{\beta\} \cdot [\{\sigma\} \vee \rho(\forall x[\Phi^x])]$$

on peut toujours considérer la grille $\{\sigma\}$ comme étant le t.r.i. d'un certain énoncé σ' : soit $\{\sigma\} = -\rho(\sigma')$

alors :

$$\{\alpha\} = \{\beta\} \cdot [\rho(\sigma') \rightarrow \rho(\forall x[\Phi^x])]$$

Désignons par $\{\alpha\}^a$, où a est un individu quelconque pour l'instant, la grille déduite de $\{\alpha\}$ en y remplaçant $\forall x[\Phi^x]$ dans la seule occurrence considérée par $(a/x)\Phi^x$:

$$\begin{aligned} \{\alpha\}^a &= \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ \hline ?(a/x)\Phi^x ? \end{array} \right| \right\} = \{\beta\} \cdot [\{\sigma\} \vee \rho((a/x)\Phi^x)] \\ &= \{\beta\} \cdot [\rho(\sigma') \rightarrow \rho((a/x)\Phi^x)] \end{aligned}$$

Supposons que $\{\alpha\}^a = \{1\}$, ce qui équivaut à : $\{\beta\} = \{1\}$
et $\rho(\sigma') \rightarrow \rho((a/x)\Phi^x) = \{1\}$

donc $\sigma' \rightarrow (a/x)\Phi^x \in T$

Ajoutons l'hypothèse que Φ^x et σ' sont indépendants de a , il en résulte alors :

$$\sigma' \rightarrow \forall x[\Phi^x] \in T \quad \text{et par suite : } \{\alpha\} = \{1\}$$

Réciproquement, si $\{\alpha\} = \{1\}$: $\{\beta\} = \{1\}$
et $\rho(\sigma') \rightarrow \rho(\forall x[\Phi^x]) = \{1\}$

d'où : $\rho(\sigma') \leq \rho(\forall x[\Phi^x])$

a fortiori :

$$\rho(\sigma') \leq \rho((a/x)\Phi^x) \quad \text{pour tout individu } a$$

donc $\rho(\sigma') \rightarrow \rho((a/x)\Phi^x) = \{1\}$, d'où $\{\alpha\}^a = \{1\}$, pour tout individu a .

On pourrait même pour cette réciproque énoncer un résultat plus précis : la n°-clôture de $\{\alpha\}$ implique la n°-clôture de $\{\alpha\}^a$, pour toute prénormalisation n° et tout individu a .

On aura un résultat tout à fait analogue, en considérant une occurrence "supérieure" de $\exists x[\Phi^x]$, puisque :

$$\left\{ \left| \begin{array}{c} ?\exists x[\Phi^x]? \\ \hline ? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ \hline ?\forall x[-\Phi^x]? \end{array} \right| \right\}$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Proposition 1 : Soient les deux couples de grilles :

$$\left\{ \begin{array}{c} ? \\ \vdots \\ ?\forall x[\Phi^x]? \\ \vdots \\ ?\exists x[\Phi^x]? \\ ? \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} ? \\ \vdots \\ ?(a/x)\Phi^x? \\ \vdots \\ ?(a/x)\Phi^x? \\ ? \end{array} \right\}$$

où a est un individu n'apparaissant pas dans la colonne considérée de la première grille de ces couples.
 Pour chacun de ces couples si l'une des grilles est égale à $\{1\}$, alors l'autre aussi. Nous dirons, pour chacun de ces couples, que l'on passe de la première à la seconde grille par une opération de décision.

Ainsi, dans le cas du problème restreint qui nous préoccupe, ces deux opérations de décision ont bien pour effet de diminuer le nombre de symboles logiques, et constituent une étape de plus pour arriver à l'écriture des grilles uniquement à l'aide d'atomes (car alors $\{\alpha\} = \{1\}$ s'exprimera tout simplement par la clôture habituelle). Notons que le choix de l'individu a est absolument arbitraire (sous la seule condition imposée) et ne change rien au résultat final.

Opérations de semi-réduction

Ces opérations concernent les occurrences "supérieures" de $\forall x[\Phi^x]$, ou "inférieures" de $\exists x[\Phi^x]$.

Raisonnons sur une grille de la forme :

$$\{\alpha\} = \left\{ \begin{array}{c} ?\forall x[\Phi^x]? \\ \vdots \\ ? \end{array} \right\}$$

a) si l'ensemble (nécessairement fini) des individus apparaissant dans la colonne considérée n'est pas vide, soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ cet ensemble, on peut écrire :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{c} ?\forall x \Phi^x ? \\ \vdots \\ ? \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} ? \forall x[\Phi^x], (a_1/x)\Phi^x, \dots, (a_n/x)\Phi^x ? \\ \vdots \\ ? \end{array} \right\}$$

puisque la seconde de ces grilles est égale à :

$$\left\{ \begin{array}{c} ? \forall x[\Phi^x] \wedge (a_1/x)\Phi^x \wedge \dots \wedge (a_n/x)\Phi^x ? \\ \vdots \\ ? \end{array} \right\}$$

et que :

$$\forall x[\Phi^x] \leftrightarrow \forall x[\Phi^x] \wedge (a_1/x)\Phi^x \wedge \dots \wedge (a_n/x)\Phi^x \in T$$

b) si dans la colonne considérée ne figure aucun individu, nous écrivons (justification analogue) :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{c} ?\forall x[\Phi^x]? \\ \vdots \\ ? \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} ? \forall x[\Phi^x], (a/x)\Phi^x ? \\ \vdots \\ ? \end{array} \right\}$$

où a est un individu arbitraire.

De même en ce qui concerne une grille :

$$\{\alpha\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ? \exists x [\Phi^x] ? \end{array} \right| \right\}$$

a) si l'ensemble, soit $\{a_1, \dots, a_n\}$, des individus apparaissant dans la colonne considérée n'est pas vide, nous écrirons :

$$(3) \quad \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ? \exists x [\Phi^x] ? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ? \exists x [\Phi^x], (a_1/x)\Phi^x, \dots, (a_n/x)\Phi^x ? \end{array} \right| \right\}$$

b) sinon :

$$(4) \quad \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ? \exists x [\Phi^x] ? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ? \exists x [\Phi^x], (a/x)\Phi^x ? \end{array} \right| \right\}$$

où a est un individu arbitraire.

Pour chacune des égalités (1), (2), (3), (4), nous dirons que l'on passe de la première à la seconde grille par une opération de semi-réduction.

Définitions :

Opérations sémantiques : toute opération de réduction, de décision et de semi-réduction.

Grille semi-réduite : une grille $\{\alpha\}$ sera dite semi-réduite (dans une certaine écriture) s'il n'est plus possible de lui appliquer d'opération sémantique sinon en faisant apparaître dans un bloc un énoncé qui s'y trouve déjà.

Remarque : toute grille réduite (c'est à dire pouvant s'écrire uniquement à l'aide d'atomes) est semi-réduite.

Grille naturellement close : une grille $\{\alpha\}$ sera dite naturellement close (dans une certaine écriture) si dans chacune de ses colonnes un même énoncé apparaît simultanément dans le bloc inférieur et le bloc supérieur.

Remarque : toute grille naturellement close est égale à $\{1\}$.

Il est important de noter les différences entre les trois types d'opérations sémantiques :

- Les opérations de réduction ne changent pas les valeurs des grilles et diminuent systématiquement le nombre de symboles logiques.
- Les opérations de décision diminuent le nombre de symboles logiques mais en général changent la valeur d'une grille, elles conservent seulement les qualités "être égale à $\{1\}$ " et "être différente de $\{1\}$ ".

- Les opérations de semi-réduction ne changent pas la valeur d'une grille, par contre elles ne diminuent pas le nombre de symboles logiques, mais font apparaître des énoncés auxquels on peut éventuellement appliquer d'autres opérations sémantiques, et qui ne comportant pas d'individus étrangers peuvent concourir à la clôture naturelle de la grille.

Enoncé clôturable : tout énoncé α pour lequel il existe un nombre fini d'opérations sémantiques transformant :

$$\wp(\alpha) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\alpha \end{array} \right\}$$

en une grille naturellement close.

L'ensemble des opérations sémantiques traduisant exactement les règles de constitution des tableaux sémantiques, il en résultera notamment le théorème fondamental suivant (cf. E.W. BETH):

$$" \alpha \in T " \iff " \alpha \text{ est clôturable } " .$$

INDEX : DEFINITIONS - AXIOMES

ENSEMBLE PREBOOLEIEN

$F(T,R) \quad (x,y,z,\dots)$

Structure définie par :

- | | | |
|--|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - multiplication : $x.y$ - négation : $-x$ - famille (C_k) de parties de F | } | axiomes : <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> $P1/ \quad x \in C_k \iff -x \notin C_k$
 $P2/ \quad x.y \in C_k \iff \begin{cases} x \in C_k \\ \text{et } y \in C_k \end{cases}$ </div> |
|--|---|--|

C_k : ensemble déductif . $T = \bigcap C_k$: puits de F .

Relation d'analogie R : $(x \in C_k \text{ et } y \in C_k)$ ou $(x \notin C_k \text{ et } y \notin C_k)$

F/R : anneau booléen quotient, φ application canonique de F dans F/R .

Structure prébooléenne normale pour un anneau booléen : (C_k) est l'ensemble de tous les ultrafiltres.

Préhomomorphisme de $F(T,R)$ dans $F'(T',R')$: application f telle que :

PH1/ $f(x.y)$ et $f(-x)$ sont analogues à $f(x).f(y)$ et $-f(x)$.

PH2/ $f(T) \subset T'$

Préhomomorphisme strict si :

$f(x.y) = f(x).f(y)$ et $f(-x) = -f(x)$.

ENSEMBLE INDIVIDUALISE

$A(u,v,w,\dots)$ sur $I(a,b,c,\dots)$ infini.

Structure définie par la donnée d'une application :

$(a,b) \longrightarrow (u \longrightarrow (a/b)u)$ de I^2 dans A^A .

(a/b) : substitution de a à b

u indépendant de a si : $(b/a)u = u$ pour tout b

base de u : ensemble I_u des individus dont dépend u .

$i(a)$: ensemble des u indépendants de a .

Axiomes :

I1/ $(a/a)u = u$

I2/ si $b \neq a$: $(b/a)u$ est indépendant de a

I3/ si u est indépendant de a : $(c/a)(a/b)u = (c/b)u$

I4/ I_u est une partie finie de I .

Application individualisante si :

$f((a/b)u) = (a/b)f(u)$

Anneau booléen individualisé : $B(r,s,t,\dots)$ si les substitutions sont des endomorphismes.

Notations pour $J \subset I$:

$$\begin{array}{ccc} i(J) & : \text{ensemble des } r \text{ tels que} & I_r \cap J = \emptyset \\ B_J & " & " & I_r \subset J \end{array}$$

Ensemble prébooléen individualisé : $E(\alpha,\beta,\sigma,\dots)$ si les substitutions sont des préhomomorphismes.

ANNEAU BOOLEIEN QUANTIFIE

$B(r,s,t,\dots)$ anneau booléen individualisé sur I , il est semi-quantifié si :

$$BQ1/ \sup_{b \in I} (b/a)r = \exists ar \quad \text{existe quels que soient } a \text{ et } r.$$

il est quantifié si en outre :

$$BQ2/ (c/b)\exists ar \leq \exists a(c/b)r \quad \text{lorsque } a,b,c \text{ sont différents et } r \text{ dépend de } a,b,c.$$

Homomorphisme quantifié : homomorphisme individualisant f tel que :
 $f(\exists ar) \leq \exists af(r)$

Normalisation de B : homomorphisme N de B dans $Z/(2)$ tel que :
 $N(\exists ar) \leq \sup_{b \in I} N((b/a)r)$

Ultrafiltre validant de B :

$$\exists ar \in \mathcal{V} \implies \text{ultrafiltre } \bigvee \text{ tel que : } (b/a)r \in \mathcal{V}$$

Anneau booléen quantifié validé : s'il y a des ultrafiltres validants et si leur intersection se réduit à $\{1\}$.

ENSEMBLE PREBOOLEIEN QUANTIFIE

$E(\alpha,\beta,\sigma,\dots)$ Ensembles déductifs V_k ensemble prébooléen individualisé, il est semi-quantifié s'il est muni d'une loi
 $(a,\alpha) \longrightarrow \exists a\alpha$ telle que :

$$PQ1/ \exists a\alpha \in V_k \iff \text{il existe } b \in I \text{ tel que } (b/a)\alpha \in V_k$$

il est quantifié si en outre :

$$PQ2/ (c/b)\exists a\alpha \in V_k \implies \exists a(c/b)\alpha \in V_k \quad \text{lorsque } a,b,c \text{ sont différents et } \alpha \text{ dépend de } a,b,c.$$

Préhomomorphisme quantifié : préhomomorphisme individualisant f tel que :
 $f(\exists a\alpha)$ est analogue à $\exists af(\alpha)$
 il sera strict si c'est un préhomomorphisme strict tel que :
 $f(\exists a\alpha) = \exists af(\alpha)$

Prénormalisation de E : préhomomorphisme n de E dans $Z/(2)$ tel que :
 $n(\exists a\alpha) \leq \sup_{b \in I} n((b/a)\alpha)$

Structure prébooléenne quantifiée normale pour un anneau booléen
 quantifié validé, si :
 (V_k) est l'ensemble de tous les ultrafiltres validants.

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE :

THEORIE DES FONCTIONS MEROMORPHES

D'APRES R. NEVANLINNA.

Vu et approuvé,
Clermont, le 28 février 1961.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,

P. REMY

Vu et permis d'imprimer,
Clermont, le 2 mars 1961.
Le Recteur de l'Académie de Clermont,

E. LAPALUS

